

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

5. 5. 368

Digitized by Google

Digitized by Google

5. 5. 368

JOHANNIS BAPTISTÆ CARACCIOLI

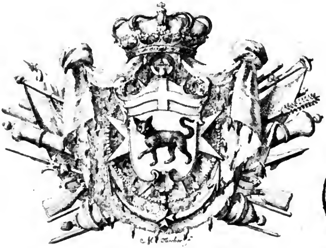
CLERICI REGULARIS

IN PISANA ACADEMIA

Publici Philoſophiæ Profeſſoris

DE LINEIS CURVIS

LIBER.



PISIS. ANNO MDCCXL.

Ex Typographia Jo. Dom. Carotti Impreſſ. Archiep.

Superiorum Permiſſu.

Digitized by Google

Digitized by Google

EXCELLENTISSIMO

CAJETANO BONANNIO

SACRI ORDINIS HIEROSOLYMITANI EQUITI

FILIO FRANCISCI

PRINCIPIS CATTOLICÆ

EX HISPANIARUM PRIMI ORDINIS MAGNATIBUS

AUREI VELLERIS EQUITIS

UTRIUSQ.SICILIÆ REGIS A CUBICULIS AUREÆ CLAVIS

JO. BAPTISTA CARACCIOLUS F.

DUas potiſſimum Cauſſas adferri ſolere intellexi, quare Illuſtres Viri, quibusque ſpectata aliqua Dignitas eſt, aut

Digitized by Google

renuunt, aut moleſtè ferunt ſibi libros hac tempeſtate dicari ab Auctoribus, vel ab iis, qui illos publicè edendos curarunt: altera eſt, harumce dedicationum nimio plus percrebreſcens copia; & librorum quoque prætenuium argumentorum; quę totum rei adimit decus: altera, horribiles illæ, deformiſſimæ, nefariæ verè adſentationes, queis ſcatere Orationes Dedicationum ſæpiſſimè videmus, & mirum in modum exæſtuare. Obſequiorum fallacium officia ſolos plebejos animos oblectant: atque illos ad arrogantem elationem ſollicitant; irritamenta procacitatis: Generoſi autem Viri vilia prorſus illa habent, & vultum avertunt. Hac ſecunda parte, qua ſola diſplicere TIBI poſſem in hoc libro TIBI dicando, minimè quidem gravis ero, EXCELLENTISSIME BONANNI. Cùm enim notam omnibus, teſtificatamque vellem voluntatem meam erga optimum Parentem Tuum, TEque ipſum, Domumque totam, & maxime etiam erga Antonium fratrem, Ordinis noſtri non exiguæ ſpei adoleſcentem, id indicium huius animi mei prae ceteris cooptavi, ut TUO Nomini

lit-

literariumhoc monumentum a me elucubratum conſecrarem; Coenobitae in paupere cella degenti convenientiſſimum. Parens enim tuus, non multis ab hinc annis iniqua ſorte nobis ereptus, meritò laudatiſſimus Vir, humanitate verò inſignis, ad Collegium Nobilium D. Caroli, Panormi recens excitatum, curaeque noſtrorum Patrum demandatum, cujus Collegii primus Moderator is erat, officioſiſſimâ Epiſtolâ, quam adhuc ſeruo, jam decimus annus eſt, me accerſivit; ut Mathematicis diſciplinis, &, quod ſupererat, tempore Græcis etiam literis Iuventutem illam è Nobilitate Urbis eximiâ inſtituerem: præſtare tamen id prohibitus tum fui impedimento collati mihi iisdem diebus muneris Philoſophicas Facultates in publica Academia Piſana tradendi. Multùm tamen illi eo officii genere obſtrictum me, devinctumque, ſatis bene novi. Ad idem Collegium TU ineunte adoleſcentia adceſſiſti; ut ad Philoſophicas muſas erudireris ab uno ex Noſtris, qui Auditor meus Theologiæ in hac Urbe Florentiæ fuerat. Domi verò animum ſtrenuè ad Principiorum Geometriæ

ſtu-

Digitized by Google

ſtudium adplicuiſti; atque non parvos obtinuiſti progreſſus: dein Nauticarum rerum ſcientiis, ad quas Geometria viam ſternebat, multam operam navare eniſus; cùm illas ad munera Ordinis tui Hieroſolymitani, cujus Inſigne Crucis bimulus acceperas, propiùs ſpectare in poſterum poſſe exiſtimares. Et quidem, praeter præclaras in Ordine dignitates *Commendatoris*, *&* *Balivi*, uti Italicè eas dicunt, quas etiam ante ætatem ab Inſtitutis Ordinis juſſam privilegio adſequutus es, brevi Præfectus Claſſis Triremium Ordinis es renunciandus. Hoc in munere herclè peramplo maritimarum rerum comparatâ ſcientiâ frueris; neceſſarieque antea quæſitam eam facile noveris. Linguæ Græcæ ſtudio non nihil quoque domi addictum TE fuiſſe adoleſcentem, conſtat. Verùm illud profecto demirari oportet, infractos animos indutum TE fuiſſe in literarum hiſce occupationibus adversùs duo illa in ipſo ſtatim limine obſtantia repagula (perdito hominum more ne, an magis natura, dicam, neſcio) contra nempe Generis Claritatem ſummam, & ſummas Divitias: qua utraque re, item poten-

tia,

tia, atque auctoritate ſupra Optimates totius Sicaniæ Regni domum Principis Cattolicæ præcellere, jam probè eſt exploratum. Ipſam verò ampliùs Pater tuus, nuper, ut dixi, fato functus, ex Hiſpaniarum Primi Ordinis Magnatibus, Aurei Velleris Eques, Regis utriuſque Siciliæ a Cubiculis AureæClavis, nova dignitate, ornatuque novo cumulavit. Fraterque Tuus Ioſephus, Familiæ modò Caput, Patri quidem in Ordine Hiſpaniarum Magnatum ſuffectus eſt. Erat verò jam ante obitum illius a Cubiculis Aureæ Clavis ejusdemmet utriuſque Siciliæ Regis. Censùs opulentiam adjeci, ac laudi verti: & benè verti, MI BONANNI. Quoniam, uti Poeta ſapientiſſime commonuit: *Et genus, & virtus niſi cum re* (opibus ſcilicet) *vilior alga eſt*. Non quòd verè vilia; ſed nimirùm quòd ita humani generis ferunt Luxuries, atque Cupiditates. Igitur ea omnia, & deliciosæ vitæ maxima commoda mentem tuam à literarum arduis ſtudiis minimè abſtraxerunt. Sed contulit ad id, credo equidem, ſolida Pietas, quam cum vitæ integritate conjunctam ab adoleſcen-

tia

tia ita coluiſti, & conſectatus ſemper es, ut ab optimo quoque tum in Melitenſi Inſula Veſtra, ubi modò moraris, cùm ubique proberis. Hæc tàm vera, & ab omni adſentantione remota, quàm publica, omnibuſque manifeſte cognita in cauſſa fuere, ut Librum Nomini tuo inſcribere libentiſſimus ipſe decernerem. In illo Geometrica multa invenies, Lineas Curvas meditando: quarum nobiliores, & ad uſum hactenus magis adhibitas pro explicatione delegi; ceteris præteritis, illiſque pariter modò in hoc Opere, quæ ſenticoſa methodo analytica infinitè Minimorum in pertractando indigerent; quales curvæ ſunt poſteriorum temporum Catenaria, Elaſtica, Velaria; & id genus aliæ nonnullæ. Vale: & Deum O. M. ut vitam Tibi diutiſſime à quibuſvis periculis ſoſpitem ſervet, quæſo, rogoque; Te verò, ut argumentum hoc animi mei erga Domum veſtram totam ex corde verè ſuſcipias, benevolentiâque complectaris.

Florentiæ Idib. Octob. CIƆIƆCCXL.

Digitized by Google

AUCTORIS SERMO

Ad Lectorem.

CUm univerſa Phyſica Scientia naturæ vim, effectus, cauſſaſque inquirere debeat; atque in ijs primo loco quæ motum corporum ſpectant, ſint edocenda; dein etiam ſententias, doctrinamque de Anima, ſeu de Corpore Animato debeat explicare; profecto manifeſtū eſt, illum germani phyſicarum rerum Præceptoris nomen jure ſibi vindicare, qui pariter Geometriam, & Artem Experientias naturales capiendi, atque illam, quæ Metaphyſica Scientia communiter nunc appellari ſolet, optime noverit. Quemadmodum enim Philoſophia univerſa in quatuor partes rectè diſtribuitur, unam, quæ definiendi, dividendi, ratiocinandi præcepta tradit; alteram, quæ de moribus, vitaque

Digitized by Google

communis officijs dijudicat, tertiam, in qua de humana mente, & voluntate, deque earum proprietatibus ediſſeritur, quæ Metaphyſica ſcientia eſt, quam nuper diximus, poſtremam verò, quæ res à natura involutas acutè inveſtigat; ita hæc ultima pars, quæ eſt Phyſica diſciplina, Metaphyſicas litteras ſibi adjunctas expoſcendo, ex illis tribus facultatibus verè conſtituitur, & planè, perfectèque coaleſcit. Igitur quò quis magis, ac diligentiùs tres haſce ipſas partes ſibi quæſitas, comparataſque habuerit, atque ad illas pro ſe animum intenderit [ſi enim unâ, aut alterâ is indigeat, multum ei deeſt ad veri Phyſicæ Scientiæ Præceptoris nomen, dignitatem, & publicam exiſtimationem dignè promerendam, ſibique adſumendam]; eò magis & Phyſicam Scientiam tenebit, & idoneus erit ad alios illâ inſtituendos, & denique longè alteri eſt præferendus, qui non æque partes eas omnes retinuerit: ſi tamen fraus aberit, ſi impudentia, ſi favor, & gratia pro alterius cauſſâ, ſi ſtudium partium Adverſariarum, ſi deceptio, ſi denique turpiſſima exquiſita captatio Auditorum. Quæ Utinam hac noſtra ætate ſæpiſſimè non evenirent; & fucum veritati facerent, os verò multitudini malo fato ſublinerent. At vera virtus, vera ſapientia, vera doctrina poſſeſſio rem ipſam ſpectat, & expetit; inanes eventus adſpernatur. Quid enim, quæ plena ſunt futilitatis, plena ſummæ levitatis, fruſtra curare? Et in eum quoque locum non rarò veneris, ut pudeat te etiam animum ad illorum cogitationem deijcere.

Digitized by Google

ijcere. Sed quæ in Phyſicæ præceptore neceſſariò requiri oſtendimus, o utinam in nobis eſſent id munus gerentibus; eſſe quidem vehementer ſtudemus. Quantùm autem ſimus infirmi, ſatis intelligimus. Geometriæ cum Phyſicis neceſſariam conjunctionem demonſtrare, quis otio iniquiſſimam vim inferens anno milleſimo ſeptingenteſimo quadrageſimo ſuſcipiet? Præſtantiſſimus omnium Veterum Philoſophorum, & Naturalium rerum Inveſtigatorum fuit Thales Geometra, Jonicæ Scholæ princeps; cujus proximus memoratur Ameriſtus Sterichori Poetæ frater in Geometrica arte ſubtiliſſimus. Italica ſecta, Jonicæ proxima, magno Pythagora duce, Neapolitani Regni, ubi primi ortus, & incunabula illi extiterunt, præclarũm, æternumque decus, Geometriam etiam coluit. Poſthac magna aperta cavitas Geometriæ cum Phyſica copulatæ ad Platonem, & Accademicorum fere familiam uſque extenſa commonefecit plane, quot levia, quot vana, quot fallacia, quot per ſolam incaleſcentem mentem excitata commentationes in Phyſiologia abſque Geometriæ præſidio poſſint effundi. Et analyticam etiam methodum Plato dicitur ad Phyſicarum rerum perſcrutationem adplicuiſſe; quæ id, de quo quæritur, ad ſua principia inverſè reducit, methodorum omnium optima. Sed poſt Platonica tempora diffractus rurſus Geometriæ ad Phyſicam adhibitæ funeſtus hiatus. Verùm non bonam ſectabantur ijs temporibus Phyſicã; ne dicam eam pravam: neque illuſtres emicuerunt Sectarum Inſtitutiones. De quot enim ſupervacaneis

in dialectica Stoici inquirebant? Qui ſolis argumentationum fallaciis, verborum argutis captionibus, ſententiarum cavillis impetere ambitioſius, & magnificè ſeſe jactitabant. Sat erit Zenonis, Stoicæ ſectæ ducis, & parentis argumentum in memoriam redigere, Achillem ob putatam invictam ſtrenuitatem nominatum, quo illi utebantur ad motum tanquam rem impoſſibilem comprobandam (ad quam majorem inſaniam poterant per ſophiſmata duci!) quod erat, Achillem nunquam teſtudinem animalium omnium tardiſſimam adſequuturum, etiam ſi centies illâ velociorem, ſi per quodvis finitum ſpatium, dum ambo moveri cœpiſſent, ab illa diſtaret. Ridicula hæc profecto, & futilia cogitabantur, facillimæ Geometriæ, ſive Scientiæ proportionum ignoratione; cùm per illam ad quot paſſus etiam Achilles ad animal ſit perventurus, plane noſcatur. Egregia Phyſica ſunt Archimedis de æquiponderantibus, & inſidentibus humido, quæ per Geometriæ principia mirificè perducta fuerunt. Galileus maximè omnium Geometriæ doctrinam ad naturalem Philoſophiam, præſertim ad diſciplinam de motu, accomodavit; eamque hac viâ quammaximè provexit. Carteſiana verò Phyſice, & Newtonica, ſeu Phyſico-Mechanica, quantùm, præcipue ſecunda, Mathematicis rationibus inhæreat, illiſque ſeſe ſubſtentet, perſpectius eſt, quàm ut oratione noſtra demonſtretur. Profecto quomodo doctrinam motuum Corporum rectè adminiſtraris, ejuſque inſtitutiones, & motuum ipſorum leges Auditoribus

dilu-

dilucidè explanaris, abſque adjumento Geometriæ? In Phyſices principijs Auditoribus noſtris tradendis, poſt illa conſtituta, greſſu breviſſimo ingredi in explicationem de Corporum motu debemus; niſi aut in Hiſtoria, aut in commenticijs hypotheſibus vel aliorū enarrandis, vel noſtris condendis vanas terere moras velimus, noſque calamitoſe implicare. Mechanica, inquies, ſcientia tum ea erit, non Phyſica. Hæc, & id genus alia quàm temere, & inconſultò, quàm indoctè de Geometria cum Phyſica diſciplina minùs quidem advincienda effutiuntur; tùm ignoratione illius, cùm ſubdolo artificio ad Auditorum numerum ſtudij facilitate ad ſe conciliandum, abſque altero amovendum! Nonne agendum in Phyſicis eſt, certè prima elementa proponenda ſunt, de motu corporum æquabili, atque accelerato, de deſcenſu Corporum gravium per plana ad Horizontem erecta, & per plana ad Horizontem inclinata, de motu projectorum; quædam etiam neceſſariò perſtringere oportet de reſiſtentia ſolidorum tàm verticaliter, quàm horizontaliter ſuſpenſorum: & alia ejuſmodi. In meteoris manifeſtè opportunitas Geometriæ perſpicitur; maximè cum Iridis naturam, proprietateſque Auditoribus intelligendas adferimus; ceteraque in eodem Phyſico argumento aggredimur illuſtranda. Sine Geometria adminiculo non niſi exilia, non niſi contemnenda de Iride proferes; non niſi prætenuia in mirabili Cæleſti Arcu, ejuſque perjucunda varietate deprehendes. Quid ſine Geometria Phyſica tota Cæleſtis erit, non modo Aſtronomia, de qua

nunc

nunc non eſt quidem ſermo habendus) nonne vana nomina ; & perperam collecta paucarum in Cœlis viſarum rerum congeries ? Alias , & longè interiores Geometricas litteras Mechanica complectuntur. Dum iſthæc dico, ſola Elementa Geometrica neceſſaria Adoleſcentibus eſſe ad rectum Phyſicæ ſtudium inſtituendum, dico ; non Geometriam univerſam, ac reconditiorem : idque in hanc partem ita accipio : quod palam , & publicè profiteor . Sed nonnulli ſunt, qui nullam, aut penè nullam Geometriam in rebus Phyſicis expoſcunt, ducuntque neceſſarium . Metaphyſicorum verò cognitionem obtinere Phyſicæ Preceptores debemus ob ea , quæ de Anima , ſeu de Corpore Animato in phyſica diſputamus . Etenim de Anima in Theologia ſermo inſtituitur, pro eo , ut divina , & cœleſtia pars hæc corporis continere poteſt; in Metaphyſicis autem proprie, & convenienter paſſiones ejus enarrantur ad mentem , voluntatemque pertinentes ; neque de ſenſibus peragitur, aut parum quidem ; neque de Anima cum Corpore colligatâ , unâque ſimul agente ; ſed in Phyſiologia inveſtigantur proprietates animi arcto vinculo cum corpore conſtricti ; illiuſque natura , & conſtitutio, ſedes in corpore , agendi modus per ſenſus , & alia hujuſmodi inquiſitione expenduntur ; quantùm quidem hac cognitione noſtra complecti nos poſſumus , & dicendo explicare . Hinc intelligis non ita quæ in Thelogicis, verùm ſanè, quę in Phyſicis , & Metaphyſicis de Anima quæruntur, multa cognatione ſimul contineri . Atque duæ ſunt præſtantiores

hoc

hoc noſtro ævo [ſed & etiam, credo, ſi præterita
tempora reſpiciantur] diſſimiles, aut etiã contrariæ
Metaphyſicarum rerum doctrinæ, Carteſij una, alte-
ra Lockij, inſignium ad laudem virorum; quæ diſſi-
dentibus principijs inſiſtunt. In ambas plane tenen-
das, differentiaſque probe callendas Phyſicæ Inſti-
tutor omni cura, meditatione, diligentia in-
cumbere pro viribus debet. Reliqua pars eſt Expe-
rientiarum naturalium pertentandarum ars, &
exercitatio. Duobus modis perficere id licet, ut no-
ſtrum munus, uti opus, præſtemus; primo ſi experi-
menta ipſa nos ipſi capiamus, naturæ receſſus lati-
tantes indagando; ſecundo, ſi, cum proprijs deficimur,
aliena ſumamus, exploratiſſimis, ac certiſſimis,
quantùm quidem cernere potuimus, ſelectis, & apud
Auctores compertis, cùm ſollertiâ, & acutâ perſpi-
caciâ, tum veracitate, dein etiam nulla anticipatio-
ne ſententiæ antea animo informatæ integram fidem
rei facientes. Hæc enim tria vel in eo, qui tranſcri-
pſit, vel in eo qui accepit ipſe Experimenta, de-
poſcuntur, ut illi fidere impunè poſſimus. Non equi-
dem refragabor dicto, rectiores eſſe proprias, quàm
alienas experientias. At multa ſunt impedimenta,
quibus ægrè quidem niſi Principum voluntate,
& Potentia proſpicietur. Interea conſilium eſt ca-
piūndum: & ex alijs excerpas, quæ optima ſunt,
ſi tua, & meliora non habeas. Illud tamen vitupe-
randum ſemper ego judicavi, de ſuo penu nihil un-
quam promere, & aliena jugiter è ſublimi deride-
re; aut cenſura notare. Quid ab æquitate alienum

magis,

magis, quàm ſi per ora omnium traducantur eximiorum Philoſophorum nova inventa per veriſſima, atque conſtantiſſima experimenta, & per valida rationum argumenta peracris ingenij conatu in naturæ abſtruſioribus penetralibus inveſtigata? Univerſe enim ferri nequit, uti valde iniquum, ſententiæ alicujus Auctoris non adſentiri, reſiſtere etiam, quam, præter interiorē veritatem, præſtantiores ingenio, & doctrinâ Viri, quā communis Accademiarum conſenſus, quam ceteri omnes in doctrina ea eruditi acceperunt, probaruntque; ſi qui illi adverſantur, nihil habeant, & prodant, neque habere, & prodere poſsint, quod valeat ad contrarios ſenſus de re illa firmos reddendos. Eòque magis, ſi novum inventum fuerit probatum, etiamſi novitas obſtiterit, etiamſi bellum quoque in illud inlatum fuerit a communi quodam cœtu, vel ob diſſimiles nationum indoles, & illarum res contrarias, vel alia quapiam de cauſſa. Quot erant, quæ Gallos a Newtonicis Phyſicis decretis, atque a methodo naturalia perſcrutandi porrò arcere debebant, & Carteſianis principijs fortiùs devinctos, totoſque dicatos retinere? Attamen plerique Galli, ubi ſeveriſſimâ trutinâ examuſſim fuerint Newtonica nova excogitata perpenſa, & diſceptationi multæ, mente etiā, voluntateque adverſa, omnia ſubmiſſa, in non paucis ad alia caſtra transfugerunt. Meritò ne, ac jure, ut exemplum unum adferam, Kepleri, & Newtoni nova Phyſica principia Attractionum, atque Newtoni nova inventa de colorum generatione tot rationibus,

nibus, & apertiſſimis experientijs irerum, ac ſæpius tentatis, roborata, à gente omnium Philoſophorum probata, ſuſcepta, maximi habita, & ab ijs, qui ſuorum amantiſſimi, quæ ſua non ſunt, oderunt, & adſpernantur, certè qui alienis propria nunquam non anteferunt, aut falſitatis argues, aut tantillùm quoque elevaris, ſolâ pronunciatione, & fallaciæ divulgatione, ſolis levibus dictis, nec rei naturâ quidem penetratâ? Novæ captæ contrariæ experientiæ publicæ faciendæ ſunt; & compertarum rationum ſolida argumenta exponenda; quæ teſtimonia ſunt veritatis. Non ſcenico ludo, ſed rationum momentis eſt decertandum. Cùm Principiorum Geometriæ vera cognitio, quæ verè, & reipſa non per vana ſpectra, & imagines ad Phyſicas Scientias a nonnullis ſatis docte adjungi ſolet; maxime ad res ipſas Phyſicas valeat; atque eâ valde in illis ſit opus; Lineæ Curvæ in primis neceſſariæ in hunc finem iudicantur; præcipuè ad Mechanicarum diſciplinarum, & Motuum Corporum intelligentiam. Qua de re Lineas Curvas magis inſignes cùm Geometricas, tùm Mechanicas hactenus memoratas explicandas aggreſſi ſumus, uberiùs quidem hæc ſcribere volentes: nam certo non hæc omnia ad Phyſicæ ſtudium, & literas neceſſaria eſſe, manifeſtum eſt: neque id propoſitum nobis fuit ſtatuere; cùm Elementa ſola Geometriæ Euclidis, Apollonij præjacenda eſſe, ac rectè adoleſcentum animos præparare debere dicamus; ut in Phyſicæ Scholam inauguratò concedant: quod jam ſupra palam confeſſi ſumus. Librum in capita diſpertivimus, non per Lemmata, Problemata, Theoremata diſtribuendo, quæ in eo continentur; exemplo aliorum etiam

tiam Geometrarum præcipuè Wallisij, & Nicolai de Martino, Neapolitanæ Academiæ Regij Mathematum Profeſsoris, Geometræ præcellentiſſimi, quod Mathematica ejus opera hactenus in lucem edita manifeſte indicant: neque eum credo quadrageſimum adhùc annum attigiſſe: qui præceptor meus in primis Geometriæ principijs fuit [cetera enim hujus diſciplinæ per nos ipſos, male quidem, neceſſariò quærere nobis cogebamur]; cariſſimus, ac dulciſſimus præceptor; vir honeſtate, humanitate, facilitate plenus; nulla profeſſoria labe perfuſus. Nonnulla ex his, quæ trademus, abs alijs quidem commemorata fuere: & Curvæ ſunt enunciatæ. Verùm ea ipſa ampliùs hic adaucta invenientur, & latiùs producta: id verò eſt, quod ſemper Geometræ efficiunt: maximè autem modus ſingularum Curvarum varia genera, & ſpecies varias infinite protendendi multò largiùs pertractatus eſt, & commonſtratus. Quædam etiam primò inventa. Atque de Curvis omnibus ita quidem in unum collectis, cum novis additis, & methodis tàm pleno ſtilo præbitis infinitè eas protrahendi, neminem, credo, adhuc ſcripſiſſe. Hæc pauca de noſtro libro in hujus ſermonis fine adjecimus ad ſolam hiſtoriam, & ad perbrevem ejus notionem, uti par erat, initio præfigendam. Alia non ſubnectimus. Pyrgopolinicem agere nullo pacto laboramus: quem in præfationibus interdum referre Scriptores mihi videntur, dum de ſuo Libro tot, tantaque præfati ea in illo eſſe oſtendere, perſuadereque aliis enituntur, quæ in ſuo Clypeo curari glorioſus miles imperabat; Curate, ut ſplendor meo ſit Clypeo clarior,
Quàm Solis radii eſſe olim, cum ſudum 'ſt, ſolent.

IN-

INDEX

CAPITUM.

CAPUT I. Natura Linearum Curvarum generatim aperitur. Pag. 5.
CAPUT II. Dinſtinctio Curvarum in Geometricas, & Mechanicas exponitur. 11.
CAPUT III. De Natura Sectionum Conicarum; earumdemque in infinitum proceſſu. 24.
CAPUT IV. Conicarum Sectionum cujuſvis generis deſcriptio. 42.
CAPUT V. De Ciſſoíde Dioclis, & Conchoíde Nicomedis; ac de ratione extendendi eas in infinitum. 93.

CA-

Digitized by Google

CAPUT VII. Curvarum Geometricarum Exempla alia afferuntur. 127.
CAPUT VIII. De Spirali Archimedea; & de aliis inſtar ipſius in infinitum efformatis. 156.
CAPUT IX. De Quadratice Dinoſtrati, & Nicomedis; ac de eius in infinitum proceſſu. 174.
CAPUT X. De Cycloíde, & Epicycloíde Recentiorum. 190.
CAPUT ULTIMUM. Curvæ aliæ Mechanicæ. 205.

LINEARUM CURVARUM

ELEMENTA

Ad Scientiarum Mechanicarum, & Motuum intelligentiam maxime neceſſaria.

Linearum curvarum contemplationem non modo Geometris, ſed ipſis quoque Phyſicis, & Aſtronomis perquam utilem, ac neceſſariam fore omnes quidem norunt. Geometris enim neceſſaria eorum notio exiſtimatur; ut mutua ipſarum interſectione problemata ad quantitatem continuam pertinentia conſtrui rite poſſint: Phyſicis autem, & Aſtronomis; ut motus Corporum, & Aſtrorum exacta curvarum, quas deſcribunt, cognitione tutiùs definiantur. Hinc mirum nil eſt, ſi recentiores tàm Geometriam, quàm Phyſicam, & Aſtronomiam novis, peregriniſque inventis adauxerint; quandoquidem partem hanc Geometriæ, quæ de lineis curvis agit, longe diligentiùs, quàm Veteres, excoluerunt.

Etenim Veteres, ubi in circuli conſideratione diu fuerunt verſati, ſatis noverunt, non omnia Geometriæ problemata circuli, & rectæ lineæ interſectione poſſe adminiſtrari; attamen opus eſſe, alias curvas circulo compoſitiores in Geometriam inferre; ut earum vel cum circulo, vel mutua interſectione conſtructio aliorum quoque Geometriæ problematum obtineretur. Hinc illas curvas lineas ſibi primum contemplandas propoſuere, quæ ex varia Coni per planum ſectione ortum trahentes nomine ſectionum Conicarum vulgo appellantur. Et quamvis non ſatis conſtet, qui primus inter ipſos illas conſideraverit, attamen, ſi Pappo Alexandrino fides ſit præſtanda, ſcripſit de iis quatuor libros Euclides, quos cum expleviſſet Apollonius Pergæus, iiſque quatuor alios adiunxiſſet, octo Conicorum libros confecit.

Sed cum noverint deinceps neque circulo, neque ipſis Conicis ſectionibus poſſe omnium Geometriæ problematum conſtructionem abſolvi, conſiderarunt quidem alias lineas curvas altioris ordinis; quales ſunt Ciſſoides Dioclis, Conchoides Nicomedis, aliæque fortaſſe quamplures, quarum nulla ad nos memoria pervenit. Sed tamen lineas haſce magis compoſitas indiſcriminatim pertractarunt; neque ullo ordine illas diſtinxere; quinetiam, ut ex eodem Pappo colligitur, crediderunt eas omnes ejuſdem eſſe indolis, & naturæ, ejusdemque conditionis cum curvis illis lineis, quæ varium, & mutabilem ortum habentes nulla quidem Geometrica conſtanti ratione poſſunt deſcribi; quales profecto ſunt ſpirales Archimedeæ, & quadratrices Dinoſtrati, ac Nicomedis. Quandoquidem utrumque Curvarum genus in Problematum ſuperioris ordinis conſtructionem indiſtinctè ab ipſis adhibebatur.

Verè tamen Veteres tria problematum Geometri-

Digitized by Google

tricorum genera diſtinxerunt, ut animadvertit Pappus Alexandrin. in Collectionibus Mathem. Et dixit Carteſius in Geometria; alia *Plana*, alia *Solida*, & alia *Linearia*. Erant *Plana*, quæ ſolvebantur, & conſtruebantur per lineas rectas, aut per circulum; utraque enim linea in plano ortum habet. *Solida* vero quæ conſtruebantur per unam, aut plures Sectionum Conicarum. Nam hæ lineæ per ſectionem in ſolido, ideſt in Cono, generantur. Et tandem *Linearia* ea dicebantur problemata, in quorum conſtructionem aliæ lineæ compoſitioris generationis aſſumi debebant. Hæc probarunt quidem Recentiores Geometræ; ſed ulterius progreſſi problemata linearia in varios ordines diviſerunt; & ipſas lineas Curvas, quæ in eorum conſtructionem adhibentur, non quidem indiſcriminatim, ſed in certas quoque claſſes diſtinctas conſiderarunt. Hinc, ſicuti priſcis Geometris magnum ſcelus videbatur, cum problema planum per ſolidum, vel etiam problema ſolidum per linearia inveniretur; ita apud recentes Geometras id ipſum eſt quidem vitium: ſed ampliùs, maximus erit error, ſi aliquod problema lineare ex improprio Curvarum genere ſolvitur. Pro variis enim problematum linearium ſpeciebus variæ itidem dictæ lineæ curvæ compoſitiores debent adhiberi.

Ceterum Linearum curvarum Elementa nos tradituri ad intelligentiam ſcientiarum motuum, de quibus præſertim in noſtris Philoſophicis inſtitutionibus peragitur, non id quidem nobis proponemus, ut quæcunque ad hanc materiam pertinent, afferre debeamus, atque præbere; neque ut libros integros dictarum linearum, ac Sectionum Conicarum per problemata, ac Theoremata exponamus; ſed tantum, ut poſtquam de natura linearum curvarum in genere egerimus, ſimulque vulgatam illam diſtinctionem in lineas

curvas Geometricas, & Mechanicas paulo clariùs explicaverimus, debeamus per varia capita propriam earum Curvarum naturam declarare, quas hactenus ſpeciatim Geometræ ſunt contemplati; & quæ ad nuper dictum propoſitum inſtitutum ſpectare videntur. Quod vero pertinet ad methodos illas novas generales pro Curvarum Geometricarum proprietatibus detegendis adinventas, idest, ad ipſam analyticam Algebram poſtremo excogitatam, & utrique curvarum generi communem, in paucis locis ea nos utemur in his exponendis; ubi ſolum neceſſitas ad id nos adiget. Cum verò, uti modo diximus, Scientia hæc linearum Curvarum ad intelligentiam multorum, quæ in Phyſicis traduntur, maximè ad doctrinam motuum ſpectantium ſit unicè neceſſaria; quod nemo bonorum Philoſophorum harum tempeſtatum non novit; explicavimus illam noſtris Auditoribus in Scholis quidem privatis domi paullo conſtrictiorem, anno 1738, & 1739. ſtilo Romano, a Menſe Novembri ad Majum; dum eo tempore Phyſicam generalem, ſeu Principia, & Inſtitutiones Phyſicas publicè tradebamus, anno antequam in magnis feriis æſtivis Patriam urbem poſt ſexdecim, & plures annos iterùm inviſeremus.

CA-

Digitized by Google

CAPUT I.

Natura Linearum Curvarum generatim aperitur.

UT Linearum Curvarum natura generatim fiat nota, præſtat rem paulo altiùs repetere; ac nonnulla præmittere de natura problematum geometricorum. Nam, cum lineæ Curvæ, ut inferiùs conſtabit, aliud omnino non ſint, quàm loca, ſive ſeries punctorum, quæ alicujus problematis Geometrici indeterminate propoſiti ſolutioni ſatisfacere poſſunt; utique earum natura nulla meliùs ratione fieri poterit perſpecta, atque cognita, quàm ſi intellecta ſit priùs natura problematum Geometricorum. Problemata Geometrica ad duas ſpecies revocantur. Alia dicuntur Determinata, quod determinatum numerum habent ſolutionum; alia dicuntur Indeterminata, quod infinitis modis ſolvi poſsunt. Exemplum eſto. Si recta quædam linea dividenda proponatur, ut rectangulum ſub ſegmentis æquale ſit quadrato lineæ rectæ; palam eſt, problema eſse determinatum; quia duo ſola puncta in propoſita recta linea inveniri poſſunt quæſtioni ſatisfacientia. At vero, ſi dumtaxat quæratur rectangulum, quod dato quadrato ſit æquale; problema erit indeterminatum; cum infinita rectangula poſſint inveniri, quorum unumquodque adæquet quadratum datum rectæ lineæ; atque idcirco omnia rectangula ſibi mutuo erunt æqualia.

Rurſus in quolibet problemate geometrico duo neceſsario continentur, *Notum*, ſive *Datum*, & *Incognitum*, ſive *Quæſitum*: ſicuti in omni Theoremate

duo

duo includuntur *Hypotheſis*, & *Concluſio*. Etenim, ſi quod proponitur, nihil aliud contineat præter Notum; id utique non erit Problema, ſed *Axioma*, ideſt propoſitio notiſſima; at ſi nihil aliud complectatur, quàm vel aliquod obſcurum, ſive novum, facillimum perfectu; & fiet *poſtulatum*, quod adhuc non eſt probatum; licet facile poſſit admitti; vel aliquod incognitum; & erit problematis ſolutio planè impoſſibilis, ſive non erit problema. Cum enim mentis noſtræ limitatio id quidem ferat, ut ex cognitis poſſit tantùm aliquid eruere; profecto, ſi nullæ adſunt conditiones, nullum nobis ſuppeditabitur medium, quo, id, quod quæritur, deregere valeamus: & per conſequens problematis ſolutio fit nobis impoſſibilis. Jam vero, quemadmodum plerumque præter conditiones neceſſarias, aliæ etiam adiunguntur ſuperfluæ, ac reiiciendæ, ut problematis ſolutio poſſit obtineri; ita aliquando non omnes adponuntur conditiones, quæ ad ſolutionem problematis ſunt neceſſariæ: & tum problema fit indeterminatum, infinitas nimirum admittens ſolutiones.

Etenim problema determinatum hac parte differt a problemate indeterminato, quod ſtatim reddetur indeterminatum, certiſque modis ſolubile, ſi adiungantur, quæ deficiunt, conditiones ad determinatam ſolutionem neceſſariæ. Sit A B recta linea, quæ ita debeat dividi, ut rectangulum ſub ſegmentis æquale ſit quadrato datæ rectæ lineæ H. In hoc problemate duæ inſunt conditiones; una, quòd latera rectanguli ſimul ſumpta æqualia ſint datæ rectæ lineæ: altera, quòd ipſum rectangulum æquale ſit dato quadrato. Hæ conditiones ſatis ſunt ad problematis determinati determinatam ſolutionem. Nam ſi ſuper data recta linea A B Semicirculus deſcribatur ACDB; atque ex extremitate una erecta perpendiculari AE, Fig. 1.

quæ

quæ ſit æqualis datæ rectæ H, agatur per punctum E recta linea E C D parallela ipſi A B; & ex punctis C, & D, in quibus ducta parallela ſemicirculum ſecat, demittantur C E, & D G eidem A E perpendiculares, erit quæſitum rectangulum tam id quod fit ex A F in F B, quam id, quod ex A G in G B. Et quidem utriuſque rectanguli latera adæquant datam lineam A B; & utrumque eſt æquale quadrato rectæ lineæ datæ H; quod quærebatur.

Sed nihilominus, ſi eidem problemati præter duas illas conditiones tertia adponatur, ſcilicet quod ſegmenta rectæ lineæ datæ A B, ſive etiam latera rectanguli inveniendi debeant eſſe in data ratione, manifeſtum eſt hanc conditionem ad problematis reſolutionem eſſe plane ſuperfluam, immo ipſum per illam reddi impoſſibile; cum problema per duas priores conditiones ſatis apte determinetur. Quamobrem, cum problema tribus iis conditionibus proponitur, nonniſi duæ ſunt conſiderandæ; & inveniendum eſt vel rectangulum dato quadrato æquale, & cujus latera ſimul ſumpta datam rectam lineam adæquent; vel rectangulum; quod dato quadrato æquale habeat latera in data proportione; vel denique rectangulum, cujus latera ſint mutuo in data proportione, & ſimul ſumpta datam rectam lineam adæquent. Nam, quemadmodum hujuſmodi rectangulum in primo caſu per ſolas illas duas conditiones optime determinatur; ita etiam in reliquis duobus caſibus per conditiones in iis adpoſitas ſatis apte definitur.

At vero ſi ex eodem problemate auferatur una conditio, ſcilicet quod latera rectanguli inveniendi æqualia eſſe debent datæ rectæ lineæ; & dumtaxat proponatur inveniendum rectangulum, quod ſit æquale quadrato datæ rectæ lineæ H, perſpicuum eſt, propter defectum alterius hujus conditionis problema inde-

deter-

determinatum evadere, & infinitas recipere ſolutiones. Fig. 2. Etenim ſi Circulus quilibet deſcribatur A B C, eumque contingat in puncto A, recta A D, quæ ipſi H ſit æqualis, & ex puncto D ducantur infinitæ rectæ lineæ D C, quæ circulo in duobus punctis B, & C occurrant; ob notiſſimam circuli proprietatem palam eſt, unumquodque rectangulorum B D C æquale eſſe quadrato, quod fit ex tangente A D, ſive etiam ex data recta linea H, cui ipſa A D ex conſtructione eſt æqualis. Quocirca, ut problema tali pacto propoſitum determinatum fiat, certumque numerum ſolutionum diverſarum admittat, ſupplenda eſt ei conditio deficiens, ex arbitrio; & quærendum eſt vel rectangulum, quod dato æquale quadrato habeat latera in data proportione, vel etiam cujus latera ſimul ſumpta datam rectam lineam adæquent.

Ex dictis obſervandum, quod quemadmodum problemata indeterminata, determinata reddi poſſunt, quoties conditiones iis deficientes adponuntur; ita viciſſim problemata determinata reddi poſſunt indeterminata, cum aliquæ ex illis conditiones auferantur; atque hoc generatim ſit dictum; quomodocumque problemata determinata reddantur per ablationem conditionum indeterminata; ſicuti etiam generatim fuit dictum de problematis indeterminatis quomodocumque redditis determinatis per conditionum adiectionem. Nam, ſicuti cum quæritur rectangulum, quod ſimpliciter dato quadrato ſit æquale, inveniri poſſunt infinita ejuſmodi rectangula, ex quibus tamen non niſi unicum inſeruit quæſito; cum latera ipſius rectanguli ſimul ſumpta æqualia eſſe debeant datæ rectæ lineæ; ſive cum problema eſt determinatum; Hac ratione cum quæritur rectangulum, quod dato quadrato ſit æquale, & cujus latera ſimul ſumpta datam rectam lineam adæquent, unum tantummodo eſt,

quod

Digitized by Google

quod quæſito ſatisfacit; cum tamen infinita poſſint inveniri rectangula, ſi vel latera rectanguli inveniendi nequaquam oporteat, ut datam rectam lineam ſimul ſumpta adæquent; vel etiam ſi ipſum rectangulum inveniendum minimè eſſe debeat dato quadrato æquale.

Advertendum ſecundo, quòd problema determinatum redditum indeterminatum, dempta aliqua conditione, ut dictum eſt, non ſolum adiecta conditione ablata ad primum problema revocari poteſt, ſed infinitis quoque modis diverſis poteſt determinari; ut non priſtinum, ſed novum efficiatur problema determinatum. Ita; cum quæritur rectangulum dato quadrato æquale, & latera habens datæ rectæ lineæ æqualia; una, aut altera conditione dempta, redditur indeterminatum problema; & iterum adpoſita una, vel altera ablata conditione, efficitur idem problema determinatum. Sed tamen, ſi, uti antea, quæratur rectangulum dato quadrato æquale, cujus latera ſint æqualia datæ rectæ lineæ; tum dempta illa conditione, quòd latera ſint æqualia rectæ lineæ, & adjecta hac nova, quòd latera ſint in data ratione, ex indeterminato fiet novum problema determinatum, non quod erat antea. Verùm tamen eſt, minimè ex arbitrio noſtro plerumque pendere, quòd problemata determinata reddantur indeterminata hoc, vel illo modo; & quòd indeterminata reddantur quoque determinata hoc, vel illo modo, qualibet adpoſita conditione. Nam ab aliis ſolvenda nobis ſtata, certaque ratione problemata plurimùm ſolent proponi. Hæc dicta ſunt; ut probe noſcatur a Tyronibus problematum indeterminatorum, & determinatorum natura, ac differentia. Quod vero dictum eſt de problemate determinato reddito indeterminato viciſſim eſt dicendum de problemate indeterminato reddito determinato.

His poſitis; quemadmodum Rethores loca ſibi

 con-

conſtituunt, ex quibus ſua deinceps ad perſuadendum argumenta facili negotio educunt; ita etiam Geometræ infinitos illos caſus problematum indeterminatorum in ordinatas ſeries diſponunt, que *loca Geometrica* conſtituunt, ita dicta: & quæ in ſerie punctorum linearum vel rectæ, vel Curvarum, de quibus modo agimus, profecto conſiſtunt: atque, ad hæc loca Geometrica confugiendum eſt, cum problema eſt enodandum. Id ſatis veteribus Geometris perſpectum hoc eodem ordine fuit. Quare hanc de locis Geometricis doctrinam multo pretio habuerunt; uti teſtis eſt Pappus Alexandrinus, qui initio Libri ſeptimi collectionum Mathematicarum, ſcribens ad Filium Hermodorum, *Locus*, inquit, *qui vocatur reſolutus, ut ſtrictim dicam, propria quædam eſt materia poſt communium elementorum conſtitutionem, iis parata, qui in Geometricis ſibi comparare volunt vim, ac facultatem inveniendi problemata, quæ ipſis proponuntur: atque hujus tantummodo utilitatis gratia inventa eſt.*

Quod ut clarius exemplis innoteſcat, quæratur rectangulum cujus latera ſint in data proportione. Ponatur quævis recta linea A B, & ei adhæreat ad quemvis angulum alia recta B C; & ſit A B ad B C in data dicta ratione. Modo jungantur puncta A, & C rectâ lineâ A C; palam eſt, in linea A C eſſe ordinatam ſeriem infinitorum valorum quæſiti problematis; ad quam adeundum, cum rectangulum quæritur, cujus latera ſint in data dictâ ratione: idest in linea A C adeſt infinita ſeries punctorum ſatisfacientium problemati. Nam ductis quibuslibet lineis M N in triang. A B C parallelis baſi B C, erit ſemper A B, ad B C, ut A M, ad M N. Quare rectangula omnia, quorum unum latus ſit A M, alterum M N, ſatisfacient problemati indeterminato; habebunt enim latera, in data dicta ratione. Fig. 3.

Eodem

Eodem modo ſi quæratur rectangulum quod incognito quadrato æquale habeat latera, quæ ſimul ſumpta datam rectam adæquent; poſitâ A B datâ rectâ lineâ; ſi ſuper ea tamquam diametro deſcribatur circulus A N B; ſeries diſpoſita punctorum N in peripheria erit locus Geometricus, ſeu ſedes punctorum infinitorum, quæ problemati indeterminato ſatisfaciunt, continentia infinitos quæſitos valores. Nam, ductis ex punctis N normalibus ad A B, ſecantibus ipſam in M, erit ſemper rectangul. A M B æquale quadrato M N, ob circuli naturam. Atque hac quidem ratione per diſpoſitionem in ordinatas ſeries, ſeu in infinita linearum puncta, contemplatio infinitorum caſuum problematum indeterminatorum, & contemplatio maximè Linearum Curvarum ipſis Geometris ſubnaſcebatur. Fig. 4.

CAPUT II.

DISTINCTIO CURVARUM In Geometricas, & Mechanicas exponitur.

NIhil frequentius apud Geometras occurrit, quàm vox *Geometricum*, quæ ex ipſo Geometriæ vocabulo promanavit: ſed ex altera parte nihil apud eoſdē magis in abdito fuit poſitum, quàm hujus vocis ſignificatio. Quidam enim adeo arcte illam accipiunt, ut id dumtaxat Geometricum vocent, quod Circulo, & recta linea confici poteſt. Alii autem tam late,

ut omne id pro Geometrico intelligant, quod omnino perfectum, atque exactum eſt, ſive circulo, ſive qualibet alia fiat ratione. Hinc diſtinctio curvarum in Geometricas, & Mechanicas pendere dici ſane poteſt.

Veteres, qui res Geometricas ſemper ad praxim traducebant; ipſamque Geometriam veluti diſciplinam contemplabantur, quæ non tam rationem, ideſt mentem, perficeret, quàm ad vitæ uſus foret accomodata; id ſolum Geometricè factum dicebant, quod Circulo, & recta linea conficiebatur; & quod conſequenter ſolo Circino, & Regulâ poterat ad praxim revocari. Ratio eſt, quia in problematum reſolutione non alius erat Veterum ſcopus præcipuus, quàm facilitas, ſive expedita ratio operandi in quæſito inveniendo: ita ut Circulo non minus uterentur in eorum problematum reſolutione, quorum locus, ſive ſedes eſt in ipſo Circulo, ſive in lineis ei adgnatis, ſed etiam in reſolvendis iis problematis, quæ cum ſint plane ſimpliciora, per ſolam rectam lineam poſſunt adminiſtrari. Unde, quia aliarum Curvarum deſcriptio non tam facile obtineri poſſe ab ipſis cognoſcebatur, quemadmodum Circuli circumferentia, quæ unius circini ductu in plano deſcribitur; hinc eſt, ut id ſolum dixerint Geometricè fieri, quod Circuli circumferentia abſolvebatur.

Atque hanc unice fuiſſe Veterum mentem pluribus quidem rationibus oſtendi poteſt. Nam primo ſi non ad facilitatem operandi, ſed ad ſolam naturæ ſimplicitatem, ſive ad ſimplices noſtræ mentis notiones in problematum reſolutione animum adplicare ii voluiſſent, merito reprehenſione dignus eſſet Euclides; qui poſtquam initio libri primi ſuorum Elementorum ſibi concedi poſtulavit, ut quovis centro, & quovis intervallo Circulus deſcribatur; deinde propoſi-

poſitione ſecunda reſolutionem aggreditur ejus problematis, in quo ad datum punctum oporteat rectam lineam applicare datæ rectæ lineæ æqualem. Et propoſitione tertia ſubjungit ſolutionem alterius problematis, in quo datis duabus rectis lineis inæqualibus ex majori portio æqualis minori debet abſcindi. Quandoquidem, ſi rem intimius conſideremus, majorem, aut ſaltem æqualem difficultatem mens noſtra experitur in intelligendo circa darum centrum deſcriptum Circulum cujusvis intervalli, quàm in concipienda ad datum punctum applicata data recta linea, quæ alteri datæ ſit æqualis; aut etiam ex majori recta linea abſciſſa portione, in concipiendo, quæ minorem adæquet.

Nec profecto alia ratione ab hac negligentiæ nota vindicabitur meo judicio, & ſententia Euclides, quàm dicendo, Veteres Geometras non tam ad ſimplices noſtræ mentis conceptus, quàm ad faciliorem operandi rationem in problematum reſolutione inſpectionem accomodaſſe; ita enim facile ratio intelligetur, quamobrem circuli deſcriptionem dato centro, & intervallo in poſtulatorum numero repoſuerit Euclides; & tamen ſpeciali ſolutione digna exiſtimaverit duo illa problemata, quæ in ſecunda, & tertia propoſitione primi libri continentur. Nam, ut Circulus dato centro, & intervallo deſcribatur, ſatis eſt intervallum illud circa datum centrum eo uſque rotare, donec ipſum ad locum redeat, unde cœperat moveri: id quod ſolius Circini ope ſatis apte obtinetur. Sed tamen, ut ad datum punctum recta linea adplicetur, quæ alteri datæ ſit æqualis; aut etiam, ut ex majori rectâ lineâ portio abſcindatur, quæ datam rectam lineam adæquet, deſcribendus eſſet ex dato illo puncto, aut etiam ex una extremitate lineæ majoris Circulus habens pro intervallo ipſam rectam

lineam

lineam datam: quod tertio Euclidis poſtulato procul eſt ut fieri poſſit, niſi prius data recta linea dato puncto, aut etiam extremitati lineæ majoris adplicetur.

Quippe notandum, tertium Euclidis poſtulatum non ita quidem ſumi debere, ut centro, & intervallo, utcumque in plano poſitis, poſſit ſemper Circulus deſcribi; ſed tantùm cum centrum datum eſt in una ejuſdem intervalli extremitate; ſive cum centrum, & intervallum in una ipſius intervalli extremitate coniunguntur. Unde, quotieſcumque datum centrum minime cum una intervalli extremitate coniunctum exiſtit, quemadmodum contingit in ſecundo, & tertio problemate, primi libri Elementorum; Circuli deſcriptio, vi ejus poſtulati, nequaquam poterit obtineri, niſi prius ad datum centrum applicetur recta linea, quæ dato intervallo ſit æqualis. Hanc eſſe veram illius poſtulati intelligentiam probatur, tum quia hac ſemper ratione eo utitur Euclides, nec alio caſu Veteres ejus interpretes duo illa problemata ſolius circuli ductu reſolvunt, niſi cum in primo datum punctum fuerit in extremitate rectæ lineæ, & in ſecundo cum duæ rectæ in uno extremo coniunguntur; tum etiam quoniam, ſi tertium illud poſtulatum ſuam quoque vim haberet, cum centrum, & intervallum minime in una ipſius intervalli extremitate coniuncta exiſtunt, ſecundum Euclidis problema tertio poſtulato non modo intellectu, ſed etiam factu facilius foret; quandoquidem tum pro tertio poſtulato primo quidem deberet adplicari ad datum centrum recta linea dato intervallo æqualis; ac deinde recta illa linea eo uſque circa datum punctum deberet rotari, donec ad eum locum rediret unde cœperat moveri; cum tamen in ſecundo problemate id tantum quæratur, ut ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualis recta linea ponatur. Am-

Ampliùs, Veteres in problematum reſolutione verè ſolam facilitatem conſiderarunt, & id Geometrice ſolum factum dixerunt, quod circulo, & recta linea conficitur hac ratione; nam hæſitarunt Conicas ſectiones in problematum reſolutione adhibere; quia tunc temporis difficile erat eas in plano deſcribere; atque ita, quod ope ipſarum obtineretur, ad praxim reducere. Apollonii enim conatus in Elementis Conicis uberius, & univerſaliùs elaborandis, quam ab omnibus aliis factum fuerit, qui ea de re ſcripſerunt, non ſine maxima laude a veteribus Geometris exceptus fuit; quin id ipſum magni Geometræ nomen ei peperit, quod hanc materiam omnibus numeris abſolutam, perfectamque tradiderit. Sed tamen ſcrupulus eis injectus in Conicis ſectionibus adhibendis exinde ipſis obortus eſt, quòd proprietates Conicarum ſectionum non quidem viderentur ipſis nec certæ, nec evidentes, quemadmodum illæ, quæ Circulo conveniunt; ſed quia deſcriptio Conicarum ſectionum non tam facile poſſet haberi, ſicuti Circuli ipſius deſcriptio, quæ ſolius circini ductu perquamfacile obtinetur.

Nam, quemadmodum ex Pappo Operum Veterum Geometrarum egregio collectore deducitur, primus Veterum conatus in rebus Geometricis fuit illorum problematum reſolutio, quæ *plana* ab eis dicta, Circulo, & recta linea efficiuntur; ſed deinceps eorum problematum ſolvendorum provinciam aggreſſi, quæ *ſolidorum* nomen apud ipſoſmet ſortita erant, cum datum angulum rectilineum trifariam ſecare primo voluiſſent, omnino hæſitantes ſubſtiterunt. Nam, cum nondum ipſis cognitæ eſſent Conicæ ſectiones, problema illud natura ſolidum per plana inquirentes nullo pacto inveniebant. Poſthæc vero, detectis Coni ſectionibus, quando illis uti cœperunt in dictorum

ſoli-

Digitized by Google

ſolidorum problematum reſolutione, non modo angulum tripartitò ſecarunt, verùm etiam problematis Deliaci ſolutionem proſpero ſucceſſu adſequuti ſunt, in quo cubus cubi duplus quærebatur. Ejuſmodi tamen ſolutiones deinceps neglexerunt; non quòd eas non probe deprehenderint; ſed quia non tam facile videbantur ipſis Coni ſectiones in plano poſſe deſignari.

Pappus enim cauſſam quærens in Scholio Propoſitionis xxx. lib. iv. verſus finem, cur antiqui Geometræ angulum rectilineum in tres partes æquales ſecare volentes in maximas difficultates inciderint; inde repetit illam; quòd problematum Geometricorum tria ſint genera; alia plana, alia ſolida, alia linearia ſupra à nobis definita. *Cum hujuſmodi ſit* (inquit) *problematum differentia; antiqui Geometræ problema jam dictum in angulo, quod* (problema) *natura ſolidum eſt, per plana inquirentes, invenire non potuerunt*; *nondum enim ipſis cognitæ erant Coni ſectiones, & ob eam cauſſam hæſitarunt; poſtea vero angulum tripartito diviſerunt ex Conicis*. Hæc Pappus de anguli triſectione. Quòd verò ipſi Veteres Coni ſectiones dein neglexerint ob difficultatem deſignationis illarum effectæ in plano, diſertè idem Scriptor indicat in Scholio propoſitionis iv. lib. iii. ubi, traditis iiſdem problematum differentiis, hæc ſubnectit: *Cum igitur tales ſint problematum differentiæ, antiqui Geometræ problema de duabus mediis proportionalibus, quod natura ſolidum eſſet, Geometrica ratione innixi* (ideſt conſtructione obtenta per Curvam in plano deſcriptam) *conſtruere non potuerunt; quoniam neque Coni ſectiones facile eſt in plano deſignare*. Item eadem habet in propoſitione xi. libri 8. *Problema, quod Deliacum appellatur, & natura ſolidum ſit, fieri non poteſt, ut Geometricis rationibus innixi conſtruamus, quoniam neque Coni ſectiones facile eſt in Plano deſcribere*.

Hæc

Hæc Veterum ſententia ad tempora uſque Carteſii multùm apud Geometras invaluit; & fere omnes id dumtaxat problema Geometricè fieri dicebant, quod per rectam lineam, & Circuli circumferentiam ſolvi potuiſſet, hac moti ratione; quòd recta linea citra laborem ſimpliciſſimâ normâ ducatur; & Circuli circumferentia ſolo circini ductu perquamfacile deſcribatur. Sed deinceps cum noverint Geometræ, ampliſſimæ Geometriæ ſcientiæ fines hoc pacto præſcribi multò anguſtiis, ſeveramque illam legem abſque ullo fundamento Veteres Geometras promulgaſſe; ut Geometriam ſimul promoverent ad ſuam, qua par eſt, amplitudinem adductam, non modo Coni ſectiones, ſed alias quoque Curvas ſectionibus Conicis compoſitiores in Geometriam invexerunt.

Quod enim Coni ſectiones, aliæque Curvæ non tam facile in plano deſignentur, etiam ſi illud concedamus; nihil tamen obſtat, quo minus eæ in Geometriam recipiantur. Siquidem, cum Geometria ſit Scientia, quæ Corporum menſuras docet, non quidem inſtrumentis Mechanicis, ſed ratione, & contemplatione; utique Geometriæ munus non erit lineas, & figuras deſcribere, ſed tantùm modum tradere, quo eæ concipi poſſint deſcriptæ; ipſaſque jam deſcriptas mente contemplari. Unde, quotieſcumque in Geometria conſtruendum problema aliquod proponitur, non ſic illud uſurpandum, quaſi aliquo ex Mechanicis inſtrumentis, ſive id Circinus ſit, ſive quidpiam aliud, uti debeamus; ſed tantùm, ut rationem exponamus, qua concipiendum ſit problema illud fieri poſſe. Nam ceteroquin ſi Geometricæ conſtructiones ex Mechanicis inſtrumentis penderent, nulla foret Geometriæ certitudo; cum nulla dari poſſint inſtrumenta adeo accurate fabrefacta, ut nullis erroribus

ſint obnoxia; ſed tantùm ea ratione concipi facta poſſunt. Quibus omnibus addi poteſt, falſum eſſe, Coni ſectiones non tam facile poſſe in plano deſignari; cum, quemadmodum Circulus circino, ita etiam Coni ſectiones aliis inſtrumentis Circino non longe magis compoſitis, & ad praxim ſatis expeditis poſſint probè deſcribi.

His poſitis: penes recentiores Geometras voce *Geometrici* omne id dicitur, quod omnino perfectum, & exactum eſt, ſive Circulo, ſive qualibet alia ratione fiat; modo tamen id tali ratione fieri poſſe mente concipiatur, & ad operationem Mechanicam animus nullo pacto intentatur. Nam non alio pacto Geometricùm a Mechanico diſtinguitur; niſi ut Geometricum vocetur, quod exactum eſt, & accuratum; Mechanicum vero, quod eſt minus exactum, & accuratum, at inſtrumentis, & artibus Mechanicis abſolutum; ſubinde ut problema aliquod Geometricè fieri dicatur, quod exacte fit, & accurate; ſive cum ejus, quod quæritur, exactus valor reperitur; Mechanice vero, cum id fit minus accurate, ſive cum Quæſiti valor non niſi per approximationem elicitur ope inſtrumentorum.

Hac ratione Carteſius initio lib. primi ſuæ Geom. animadvertit, omnia problemata, quæ in Geometria conſiderantur, facile poſſe ad hujuſmodi terminos reduci, ut ad illorum conſtructionem tantùm opus ſit, rectarum quarumdem linearum longitudinem cognoſcere. Exemplum eſto: ſuper data recta linea A B

Fig. 5.

conſtituendum proponatur triangulum omnia latera æqualia habens: ſi illud jam factum ſupponamus, ut ſit A C B, & ex ang. C demittamus perpendicularem C D; quia hæc perpendicularis bifariam dividit in puncto D datam rectam A B, palam eſt eò rem adduci, ut cognoſcatur valor hujus perpendicularis

cularis C D. Eo enim cognito, facilis quidem eſt problematis conſtructio. Quoniã ſatis erit datã rectam lineam A B dividere bifariam in puncto D, & ex puncto ſectionis erigere perpendicularem D C longitudinis inventæ. Nam ſi deinceps jungantur rectæ C B, C A, erit A C B triang. quæſitum; & propoſitum problema ad valorem alicujus rectæ lineæ cognoſcendum ſolùm eſt revocatum. Ergo hac conſideratione problemata Geometrica a Mechanicis diſtinguere facile erit, & pronum. Nam, cum unumquodque problema eô quidem reducetur, ut ad ipſius conſtructionem tantùm opus ſit cognoſcere valorem alicujus rectæ lineæ; utique illud problema dicetur Geometricum, ſi hujus rectæ lineæ valor exacte poſſit reperiri; & viciſſim problema erit, diceturque Mechanicum, cum valor ejuſdem rectæ lineæ non alia quidem ratione detegi poterit, quam per approximationem, ſive ſtatuendo limites, quibus valor ille continetur.

Sed hic notetur velim, quòd pro exacto alicujus rectæ lineæ valore non modo hic intelligi debeat, qui numeris exprimi poteſt, ac proinde inveniri per proportionem rationalem, quam habet cum alia recta linea ſimiliter numeris expreſſa; cum id ferme idem ſit, ac problema Geometricum vocare, quod alii problema Arithmeticum dixere, cujuſmodi ſunt omnia problemata, quæ in libris Diophanti Alexandrini per ſolos numeros ab eodem ſubtiliter reſoluta continentur; ſed intelligendus eſt exacte cognitus valor alicujus rectæ lineæ, ſemperac ſcitur relatio, quam habet cum alia recta linea, etiamſi iſthæc relatio numeris exprimi nequeat.

Quô circa ut omnis æquivocatio tollatur, dicere poſſemus problemata omnia ad duas præcipuas ſpecies revocari; & alia eſſe problemata Exacta, in quibus

ſcilicet exacte reperiri poſſunt valores linearum rectarum, quæ problemata illa determinant: alia problemata Approximationis, in quibus nempe valores earum linearum nonniſi per approximationem poſſunt comperiri. Sed problemata prioris ſpeciei alia inſuper eſſe ſimplicia, ſive Arithmetica; cum valores dictarum linearum utpote rationales numeris exprimi poſſunt; alia compoſita, ſive Geometrica; cum ii valores nullis numeris deſignari queunt. Sed ne in deſignandis duabus præcipuis problematum ſpecibus a vocibus *Geometrici*, & *Mechanici* recedamus, palam eſt, non aliam eſſe differentiam inter problema Geometricum, & problema Mechanicum; niſi quòd in illo valor Lineæ Determinatricis exacte ſemper inveniatur; cum tamen in problemate Mechanico idem ille valor nonniſi per approximationem poſſit inveniri.

Ex hac problematum diſtinctione in Geometrica, & Mechanica orta eſt diſtinctio Curvarum Geometricarum, & Mechanicarum. Cum enim ex dictis Capite ſuperiori lineæ Curvæ aliud non ſint, quàm loca, ſive ſeries punctorum, quæ alicui problemati indeterminato ſatisfacere poſſunt; utique ſi problema illud Geometricum erit, dicetur & ipſa Curva Geometrica; ſecus vero ſi problema Mechanicum erit, quia Curva, quæ ad ipſam refertur, per approximationem invenitur, Mechanica itidem ea nominabitur. Quare Curvæ Geometricæ poterunt ſemper Geometrica, & conſtanti ratione deſcribi; non ita quidem Curvæ Mechanicæ.

Hanc diſtinctionem primus omnium conſideravit Carteſius, nam omnes alii Geometræ, qui ipſum præceſſere, has duas Curvarum ſpecies valde commiſcebant. Atque eô quia Curvæ Geometricæ poſſint ſemper Geometrica, & conſtanti ratione deſcribi, ſecus vero Curvæ Mechanicæ, ſolas Curvas Geome-

tricas

tricas in Geometriam admittendas eſſe putavit, nil vero Mechanicas, ea quidem ratione, quòd & ſi Geometræ munus non ſit, lineas, & figuras deſcribere, & in plano deſignare, quippe qui illas tantũ deſcriptas ſupponit; attamen maxime ad Geometram pertineat, rationem tradere, qua linearum, & figurarum ortus, ſive deſcriptio Geometricè, & conſtanter intelligi poſſit.

Sed alii poſt Carteſium non obſcuri nominis Geometræ tametſi noverint Curvas, quas Carteſius vocavit Mechanicas, valde differre a Geometricis, dictis rationibus; nihilominus minime paſſi ſunt, Mechanicas Curvas ab albo Geometriæ expungi. Nam, quòd Geometrica, & conſtanti ratione deſcribi minime poſſint, id in cauſa eſſe nequit, ut a Geometria non conſiderentur; cum ad id ſatis ſit, ut ſi mente ſupponantur deſcriptæ, habeant, haud ſecus ac Curvæ Geometricæ, certas, & conſtantes proprietates, quæ ad omnia ipſarum Curvarum puncta pertineant: & proinde Curvas illas non quidem Mechanicas, ſed Traſcendentes, ſive etiam Geometricè Irrationales dicendas potiùs eſſe decernunt.

Docent enim, triplex eſſe genus quantitatum; earum, quæ numeris perinde, ac lineis rectis exprimi poſſunt; illarum, quæ nullis quidem numeris, ſed per ſolas lineas rectas deſignantur; & tertium denique genus earum, quæ nullis quidem numeris, ſed nec etiam rectis lineis poſſunt definiri. Nam ſi quæratur ex. gr. radix quadrata numeri 9. ea non modo exprimi poteſt per longitudinem alicujus lineæ rectæ, verum etiam per numerum 3. ſed ſi quæratur quadrata radix numeri 8. ea nullo pacto deſignari poteſt numero integro, ſive fracto; ſed tantum per longitutinem lineæ rectæ; quærendo ſcilicet ope Circuli mediam proportionalem inter 1. & 8. vel etiam

inter 2. & 4. Et deniq. ſi quæratur valor circumferentiæ Circuli, ſive ſi quæratur proportio quam habet illa ad ſuam diametrum, non modo hæc proportio nullis numeris, ſed ne per rectas lineas quidem poteſt definiri.

Hinc primo, cum Geometria ſit Scientia, quæ circa quantitatem verſatur, pro triplici illa quantitatis ſpecie triplex diſtinguunt problematum Geometricorum genus; unum ſiquidem ſtatuunt eorum problematum, in quibus quantitates quæſitæ numeris, perinde ac lineis rectis, deſignantur, qualia ſunt, quæ vulgo ſimplicia, ſive Arithmetica dicuntur: ſecundum ea problemata continet, in quibus quantitates quæſitæ non quidem numeris, ſed per ſolas lineas rectas exprimuntur; atque ejuſmodi ſunt, quæ paulo ante Geometrica nominavimus. Relinquitur tertium genus, quod ea problemata complectitur, in quibus quantitates quæſitæ neque numeris, neque lineis rectis poſſunt deſignari; cujus generis ſunt problemata, quæ Mechanica nuncupavimus.

Hinc 2. nulla etiam facta inter hæc problemata diſtinctione, ſed omnibus perinde conſideratis, ac ſi quantitates in iis quæſitæ rectis lineis poſſent definiri, triplex ſtatuitur Linearum genus; nam eo modo, quem ſuperiori capite docuimus, problematis indeterminate conſideratis, erit quidem primum genus linearum, ad quas pertingunt rectæ lineæ, quæ in ordinatas ſeries diſpoſitæ deſignant quantitates in problematis primi generis quæſitas. Secundum genus erit linearum, quæ ſunt limites, quibus ſeries problematum ſecundi generis continentur; & tertium denique genus lineas illas complectetur, quæ ſunt limites ſerierum problematum tertii generis. Quare, quemadmodum in primo genere ſolæ rectæ lineæ continentur, & ſeries problematum primi generis ſunt ſem-

per

Digitized by Google

per in triangulis; ita in ſecundo Curvæ illæ lineæ erunt, quas Geometricas Carteſius vocavit; atque ita in tertio lineæ Curvæ continebuntur, quas idem Carteſius Mechanicas dicendas eſſe decrevit.

Hinc tertio; quemadmodum quantitates, quæ nullis numeris, ſed per ſolas lineas rectas deſignantur, dicuntur Arithmeticæ irrationales, ad differentiam earum quantitatum, quæ, cum numeris perinde, ac lineis rectis exprimantur, Arithmeticæ rationales dicuntur; ita etiam quantitates illas, quæ non modo nullis numeris, ſed nec etiam ullis rectis lineis poſſunt definiri, quantitates Geometricè irrationales nominarunt Recentiores; & diſtinxerunt ab iis, quæ cum ſolis lineis rectis deſignentur, dici poſſunt Geometricè rationales: qua ratione Curvas illas quas Carteſius Mechanicas nuncupavit, Geometricæ irrationales ipſi dixerunt; & quæ a Carteſio Geometricæ dicebantur, Curvas etiam Geometricè rationales nuncuparunt. Atque hac etiam de cauſa factum eſt, ut eaſdem illas Curvas Traſcendentes nominaverint; nam, quemadmodum primum linearum genus ſub ſecundo etiam continetur; cum, quod per ſolam lineam rectam efficitur, fieri quoque poſſit per Circuli circumferentiã, aut per quamvis aliam Curvam lineam Geometricè rationalem; ita etiam, quia quod primo, aut ſecundo genere linearum obtinetur, poteſt tanto magis per lineas tertii generis obtineri, ipſum tertium genus linearum ſub ſe comprehendet tam genus primum, quàm genus ſecundum: & proinde, cum per utrumque tranſcendat, non abs re ipſe lineæ tertii generis, quas Mechanicas Carteſius nominavit, lineæ Tranſcendentes poterunt nominari.

CAPUT

CAPUT III.

De Natura Sectionum Conicarum Earumdemque in infinitum Proceſſu.

JAm illuc, quò animus properabat, & in quo repoſita eſt hujus tractatus doctrina, pedem immittimus. Huc uſque naturam linearum Curvarum generatim contemplati ſumus; nunc propriùs ad rem accedentes ipſas Curvas lineas hactenus a Geometris conſideratas enumerandas ſuſcipimus: & propriam lineæ Curvæ cujuſque naturam ſingillatim expoſitione proſequemur. Primę lineę Curve, que Veteribus poſt Circulum innotuerunt, ſunt Conicæ ſectiones, ut jam ſub initium diximus: quare harum naturam primò contuebimur; quas cum tres eſſe conſtet, Parabolam, Ellipſim, Hyperbolem, ſitque Parabola aliis duabus longe ſimplicior, ab ea initium ducemus.

Fig. 6. Eſt Parabola Curva linea, in qua quadrata ordinatarum eamdem inter ſe habent rationem, ac abſciſſæ correſpondentes: ut ſi rectæ lineæ A B ad quemvis datum ang. ordinatim adplicentur plures rectæ lineæ M N ſibi invicem parallelæ, ſed talis quidem naturæ, & longitudinis, ut ipſarum M N quadrata habeant inter ſe eamdem rationem, ac abſciſſæ A M iis ordinatis correſpondentes, linea Curva A N N, quæ per extremitates earum ordinatarum tranſibit, *Parabola* dicetur.

Unde

Unde, ſi ex vertice ejus A ducta recta A C ipſis M N parallela talis longitudinis, ut quadratum unius ordinatæ D E æquale ſit rectangulo C A D, quod fit ex ipſa recta AC in abſciſſam correſpondentem AB; erit quadratum cujuſvis alterius ordinatæ MN æquale rectangulo C A M, quod fit ex A C in abſciſſam correſpondentem A M. Nam, per Parabolæ naturam, ut D E quadratum ad M N quadratum, ita abciſſa A D ad abſciſſam A M; ſed, ſumpta comuni altitudine A C, abſciſſa A D eſt ad abſciſſam A M, ut rectangulum C A D, ad rectangulum C A M; quare erit ex æqua ratione, ut DE quadratum ad M N quadratum, ita rectangulum C A D, ad rectang. C A M: & proinde, quia rectangulo C A D æquale ſupponitur D E quadratum, erit etiam rectangulo C A M æquale M N quadratum.

Elliplis eſt Curva linea, in qua ordinatarum quadrata eamdem ſervant rationem, quam habent rectangula comprehensa ſub portionibus ex eadem rectâ lineâ per ordinatas illas abſciſſis. Ut ſi eidem rectæ lineæ A B ad quemvis datum ang. ordinatim adplicentur plures rectæ lineæ M N ſibi invicem parallelæ in quovis angulo, ſed ejus tamen longitudinis, ut ipſarum M N quadrata ſint veluti rectangula A M B, quæ fiunt a correſpondentibus portionibus A M, M B, ex eadem recta linea A B per ordinatas dictas abſciſſis, linea Curva A N B connectens harum ordinatarum extremitates *Ellipſis* nominabitur. Unde ſi ex vertice A ducatur recta A C, quæ ipſis M N parallela talis ſit longitudinis, ut quadratum unius ordinatæ D E ſit ad ſuum rectangulum A D B, veluti ducta recta A C ad ipſam A B erit quadratum cujuſvis alterius ordinatæ M N ad ſuum rectang. A M B, etiam uti A C, ad A B. Nam cum per Ellipſis naturam quadratum D E ſit ad M N Fig. 7.

D qua-

quadratum, uti rectangulum A D B ad rectang. A M B, erit, permutando, ut D E quadratum ad rectang. A D B, ita M N quadratum ad rectang. AMB; unde quia ex hypotheſi D E quadratum eſt ad rectang. A D B, uti A C ad AB; erit ex æqua ratione etiam ut M N quadratum ad rectang. A M B, ita A C, ad A B.

Fig. 8. Ex quo patet quadratum cujuslibet ordinatæ M N minus eſſe rectang. C A M quod ſit ex recta A C in abſciſſam correſpondentem A M alio rectang. ſimili, ſimiliterque poſito ei, quod ſit ex A C in A B. Etenim juncta B C, ductaque ex puncto O, in qua ipſa M N huic occurrit, recta O P ipſi A B parallela; propter ſimilitudinem triangulorum A C B, M O B, erit uti A C, ad A B, ita M O, ad M B; ſed, per antecedentem Ellipſis proprietatem, AC eſt ad A B, ut M N quadratum ad rectang. A M B; ſumptaque communi altitudine AM, eſt M O ad M B, ut rectangulum A M O ad rectangulum A M B; quare erit ex æqua ratione, ut M N quadratum ad rectangulum A M B, ita rectangulum A M O ad idem rectangulum A M B; & proinde M N quadratum æquale erit rectangulo A M O: jam vero rectangulum A M O minus eſt rectangulo C A M rectangulo alio C P O quod eſt ſimile, & ſimiliter poſitum rectangulo C A B, cum ſint circa eandem diagonalem B C. Ergo M N quadratum minus erit rectangulo C A M, alio rectangulo ſimili, ſimiliterque poſito ei, quod ſit ex A C in A B. Q. E. D.

Fig. 9. Hyperbola eſt linea Curva, in qua ordinatarum quadrata eam inter ſe ſervant proportionem, quam habent rectangula, quæ ſiunt ex portionibus ſumptis ex utroque alicujus rectæ lineæ termino, & correſpondentibus ordinatis ad ipſam illam rectam lineam verſus unum terminum productam adplicatis. Si A B ſit

ſit aliqua recta linea terminata, & ad eam verſus terminum unum A productam adplicentur in quolibet dato angulo plures rectæ lineæ M N parallelæ; ſed ita tamen ut ipſarum M N quadrata in ea inter ſe ſint ratione, quam habent rectangula A M B, quæ fiunt ex correſpondentibus portionibus A M, B M ſumptis ex utroque termino rectæ lineæ A B; linea Curva A N E, quæ per earum ordinatarum extremitates tranſibit, *Hyperbola* dicetur.

Si ex vertice A ducatur recta A C perallela ordinatis M N ejus longitudinis, ut quadratum unius ordinatæ D E ſit ad ſuum rectangulum A D B, ut A C ad A B; erit etiam quadratum cujuſvis alterius ordinatæ M N ad rectangulum ipſi correſpondens A M B, ſimiliter ut A C ad A B. Nam, cum per hyperbolæ naturam D E quadratum ſit ad M N quadratum, ut rectangulum A D B ad rectangulum AMB, erit, permutando, ut N E quadratum, ad rectangulum A D B, ita M N quadratum ad rectangulum AMB. Unde quia, ex hypotheſi, DE quadratum eſt ad rectangulum A N B ut AC ad A B; erit, ex æqua ratione, uti M N quadratum ad rectangulum A M B, ita A C ad A B.

Ex quo patet quadratum cujuslibet ordinate MN majus eſſe rectangulo CAM, quod ſit ex recta AC in abſciſſam correſpondentem A M rectangulo alio ſimili, ſimiliterque poſito ei, quod fit ex A C in A B. Etenim juncta BC, productaque ipſa M N, donec cum ea protracta conveniat in puncto O; quia ſimilia ſunt Triangula A C B, M O B, erit ut A C ad A B, ita M O ad M B. Sed per antecedentem hyperbolæ proprietatem, AC eſt ad A B, ut M N quadratum ad rectangulum A M B; & ſumpta communi altitudine A M, eſt M O ad M B, ut rectangulum A M O ad rectangulum A M B; quare erit **Fig. 10.**

 ex

ex æqua ratione, ut M N quadratum ad rectangulum A M B, ita rectangulum A M O ad idem rectangulum A M B; & proinde M N quadratum æquale erit rectangulo A M O. Jam vero demiſſa C P ipſi A M parallela, rectangulum A M O majus eſt rectangulo C A M, alio rectangulo C P O, quod eſt ſimile, ſimiliterque poſitum rectangulo B A C, cum ſint circa eamdem Diagonalem B O; igitur M N quadratum majus etiam erit rectangulo C A M rectangulo alio ſimili, ſimiliterque poſito ei, quod fit ex A C in A B.

Ex his omnibus facile colligitur quænam ſit harum omnium Curvarum differentia. In Parabola quadratum cujusvis ordinatæ æquale eſt rectangulo ex abſciſſa in rectam lineam conſtantem, quæ *Parameter*, ſive *Latus rectum* nominatur. In Ellipſi idem quadratum minus eſt, in hyperbola majus rectangulo ſub abſciſſa, & latere recto comprehenſo, alio rectangulo ſimili, ſimiliterque poſito ei, quod fit ex eodem latere recto in aliam rectam lineam, quæ *Lateris tranſverſi* nomine appellatur. Inde ejusmodi Curvæ nomine Parabolæ, Ellipſis, & Hyperbolæ appellantur; quandoquidem Parabola comparationem, ſive æqualitatem, Ellipſis defectum, & Hyperbola exceſſum Græce notant.

Sed ad harum Curvarum ſimilitudinem alias ſimiles Curvas in infinitum promotas recentiores Geometræ excogitarunt. Has ſimiliter infinitas Parabolas, infinitas Ellipſes, & infinitas hyperbolas nominarunt. Et, ut ab infinitis Parabolis ordiamur, quemadmodum parabolæ Conicæ Veterum ea eſt præcipua proprietas, ut quadratum cujuſque ordinatæ adæquet rectangulum ſub latere recto, & correſpondente abſciſſa comprehenſũ, ita alias Curvas in infinitum effinxerunt, quarum generaliter ea ſit proprietas, ut non quadra-

tum

tum dumtaxat, ſed quælibet cujuſque ordinatæ poteſtas adæquet homogeneum productum, quod fit ex alia minori poteſtate lateris recti, in poteſtatem reliquam abſciſſæ correſpondentis. Et ex variis poteſtatibus, ad quas aſcendere poteſt ordinata, diverſe Curvas illas nominarunt. Siquidem dicuntur Parabolæ Quadraticæ, ſive primi generis, ſi ordinatæ poteſtas ſit quadratum; Cubicæ, ſive ſecundi generis, ſi ordinata ad cubum aſcendat, atque ita in infinitum.

Cujuscumque vero generis Parabolæ, ſi quadraticæ, ſive eæ, quæ primi generis ſunt, utpote unius dumtaxat ſpeciei, excipiantur; in plures alias ſpecies diſtribui poſſunt; idque pro variis modis, quibus parameter, ſive latus rectum componi poteſt cum abſciſſa, ut productum obtineatur homogeneum poteſtati, ad quam aſcendit ordinata. Hoc pacto: Parabolæ Cubicæ, ſive ſecundi generis duplicis eſſe poſſunt ſpeciei. Etenim vel in iis Cubus cujuslibet ordinatæ adæquat Solidum, quòd fit ex quadrato lateris recti in abſciſſam correſpondentem, & tales Parabolæ primam ſpeciem conſtituent; vel ejus ſunt naturæ, ut Cubus cujusque ordinatæ æqualis ſit Solido, quod fit ex latere recto in quadratum abſciſſæ coreſpondentis; & hoc quidem caſu ejusmodi Parabolæ ſpeciem alteram component.

Eadem ratione duplicis quoque ſpeciei eſſe poſſunt Parabolæ tertii generis quæ alio vocabulo Quadrato - quadraticæ etiam dicuntur. Siquidem vel quadrato - quadratum unius cujusque ordinatæ æquale eſt Plano - plano, quod fit ex Cubo lateris recti in abſciſſam correſpondentem; & cum hoc contingit, Parabolæ primam ſpeciem earum, quę tertii ſunt generis conſtituent: vel eam habent naturam, ut quadrato - quadratum cujuslibet ordinatæ æquale ſit plano-plano, quod ſub latere recto, & Cubo abſciſſæ cor-

reſpon-

reſpondentis continetur; & tales quidem Parabolæ ſpeciem alteram efformabunt. Sed notandum eſt, quod tamen ſi in hujuſmodi tertii generis parabolis poſſit quoque quadrato - quadratum unius cujusque ordinatæ per æquationem comparari cum plano - plano, quod ſub quadrato lateris recti, & quadrato abſciſſæ correſpondentis comprehenditur; attamen non hinc parabolæ, quæ hac natura pollent, ſpeciem alteram parabolarum tertii generis conſtituent; quandoquidem reipſa ne tertii generis quidem ſunt; cum, extracta ex utraque parte radice quadratâ, ad parabolas primi generis deprimantur. Id quod etiam in ſimilibus caſibus eſt obſervandum.

Ita. Si in hiſce Parabolis latus rectum ſit 2. & ordinata dicatur a abſciſſa vero ſit 3. jam quadratum a. eſt $a\,a$ ſeu a^2 & quadrato - quadratum ipſiuſmet a, ſive quadratum a^2 eſt a^4: eſt vero 4 quadratum 2 lateris recti; & 9 eſt quadratum 3 abſciſſæ; quare plano - planum ex quadrato lateris recti in quadratum abſciſſæ, erit 36. Ergo hæc Parabola eam habebit proprietatem, ut ſit a^4 æquale 36. Verùm radix quadrata a^4 eſt a^2; & radix quadrata 36 eſt 6; ergo fiet proprietas, ut ſit a^2 æquale 6. ſeu $a^2 = 2 \times 3$; ideſt Parabola erit, cujus ordinatæ quadratum eſt æquale rectang. ex latere recto 2 in abſciſſam correſpondentem 3. Sed Parabola, cujus ordinatæ quadratum eſt æquale rectangulo ex latere recto in abſciſſam correſpondentem, eſt Parabola prima communis Apolloniana. Quare patet propoſitum.

Ex

Ex infinitis Parabolis ad infinitas Ellipſes tranſeuntes dicimus, quòd, quemadmodum Conicæ Veterum Ellipſis ea eſt natura, ut quadratum cujuſque ordinatæ deficiat a rectangulo ſub latere recto, & correſpondente abſciſſa comprehenſo rectang. alio ſimili, ſimiliterque poſito ei, quod fit ex eodem recto latere in latus transverſum; ita recentiores Geometræ Ellipſes alias in infinitum excogitarunt, quarum ea eſt natura, ut non quadratum tantummodo, ſed quævis cujuſque ordinatæ poteſtas deficiat ab homogeneo producto, quod fit ex alia minori poteſtate lateris recti in poteſtatem reliquam abſciſſæ correſpondentis, defectu ſimili, ſimiliterque poſito alteri homogeneo producto, quod fit ex eadem lateris recti poteſtate in poteſtatem reliquam lateris tranſverſi. Et, perinde ac in parabolis dictum eſt, diversè Ellipſes haſce nominarunt ex variis poteſtatibus, ad quas aſcendere poteſt ordinata. Dicuntur enim Ellipſes quadraticæ, ſive primi generis, ſi ordinatæ poteſtas ſit quadratum, Cubicæ, ſive ſecundi generis, ſi ordinatæ poteſtas ad Cubum aſcendat, atque ita deinceps.

Hinc etiam unumquodque genus Ellipſium, dummodo quadraticæ, ſive eæ, quæ primi generis ſunt, excipiantur, in varias alias ſpecies dividi poteſt; idque pro diverſis rationibus, quibus latus rectum cum abſciſſa complicari poteſt; ut productum habeatur homogeneum poteſtati, ad quam aſcendit ordinata. Qua ratione Ellipſes Cubicæ, ſeu ſecundi generis duplicis eſſe poſſunt ſpeciei; vel ſi Cubus cujuſque ordinatæ deficit a ſolido, quod fit ex quadrato lateris recti in abſciſſam correſpondentem, defectu ſimili, ſimiliterque poſito ei ſolido, quod fit ex eodem lateris recti quadrato in latus tranſverſum; & hæ Ellipſes primam ſpeciem conſtituent; vel ſi Cubus cujuſcumque ordinatæ deficiat à ſolido, quod fit ex la-

te-

tere recto in quadratum lateris tranſverſi ; quo caſu ejuſmodi Ellipſes ſpeciem alteram conſtituent.

Et duplicis quoque ſpeciei eſſe poſſunt Ellipſes tertii generis alio vocabulo Quadrato - quadraticæ etiam dictæ; nam, vel quadrato - quadratum unius cujuſque ordinatæ deficit a plano - plano quòd fit ex Cubo lateris recti in abſciſſam correſpondentem, defectu ſimili, ſimiliterque poſito ei plano - plano, quod fit ex Cubo lateris recti in latus tranſverſum; & tum prima ſpecies fiet Ellipſium tertii generis ; ſi vero quadrato - quadratum cujuslibet ordinatæ deficit à plano - plano, quod ſub latere recto fit, & Cubo abſciſſæ correſpondentis, defectu ſimili, ſimiliterque poſito ei plano - plano, quod ex eodem latere recto in Cubum lateris tranſverſi ; & hujuſmodi Ellipſes ſpeciem alteram tertii generis conſicient. Non ſunt verò enumerandæ in hoc tertio genere Ellipſes, in quo quadrato - quadratum ordinatæ fiat æquale plano - plano, quod ſub quadratis lateris recti, & abſciſſæ correſpondentis continetur ; dempto defectu ſimili, ſimiliterque poſito ei plano - plano, quod fit ex quadrato lateris recti, in quadratum lateris tranſverſi. Nam, haud ſecus ac in Parabolis, hujuſmodi Ellipſes, extracta radice quadratâ á quantitatibus unâ comparatis, ſeu mutuo æquatis ad Ellipſes primi generis deprimuntur.

Sed hic calculo Algebrico ad naturam harum Curvarum ultra productarum, & ad quaſdam earum proprietates ſatius exponendas accomodato utendum neceſſariò nobis eſt, ut rectè eæ intelligantur ; quod neque mirum, ac novum, neque importunum debet videri; tum quia, hoc duce Calculo, Geometria univerſa, & maximè hæc diſciplina Curvarum miriſicè provecta eſt, uti benè notum Geometris ; quare aliquo jure ipſum huncce calculum Geometria ejuſmodi

Curva-

Curvarum ſibi depoſcere videtur; cùm etiam quoniam ope hujus calculi multa in nova Geometria, immo fere omnia, & potiſſimum hæc, quæ pertractamus, longè expeditiùs, ac clariùs & exponuntur, & intelliguntur.

Igitur poſitis litteris *m* & *n* pro indiciis poteſtatum, quas habent quantitates utriuſque membri Algebricæ æquationis; & dicta *x* abſciſſâ noſtræ Ellipſis [*Fig.* 7.] dicta vero *y* ordinatâ correſpondente; atque latere recto nuncupato *a*, & latere tranſverſo nuncupato *b*; efformo pro omnibus Ellipſibus cujusvis generis, & ſpeciei generaliſſimam æquationem

$$y^{m+n} = \overline{a - \frac{a}{b}x}^{\,m} \times x^{n}$$

Ex hac æquatione clariſſime cognoſcitur primò, in Ellipſibus his omnibus infinite productis, reipſa latus rectum ita complicari cum abſciſſa, ut productum habeatur ſemper homogeneum poteſtati ordinatæ: quales Curvæ eſſe debent: & ita efformatæ eſſe debent etiam æquationes deſignantes illas. Nam hoc modo collocata ſunt poteſtatum indicia *m*, & *n*, ut id ſemper neceſſario fiat. Secundò cognoſcitur, ordinatæ ipſiuſmet poteſtatem deficere ſemper in Ellipſibus his omnibus ab homogeneo producto ex alia minori poteſtate lateris recti in poteſtatem reliquam abſciſſæ correſpondentis, defectu ſimili, ſimiliterque poſito alteri homogeneo producto ex eadem lateris recti poteſtate in poteſtatem reliquam lateris tranſverſi. Sicuti id eſt in Ellipſi communi Apolloniana; & quæ nota eſt prima, ac præcipua Curvarum linearum Ellipticarum. Nam æquatio eſt generalis; quare ſi in ea id oſtendetur, factum idem erit pro omnibus æquationibus Ellipſium omnium, ſeu pro cunctis Ellipſi-

 bus.

Digitized by Google

bus. Igitur oſtendam, productum $\overline{a - \frac{ax}{b}}^{m} \times x^{n}$ eſſe id ipſum productum; quod profecto eſt, quod quæritur. Jam $a - \frac{ax}{b}$ eſt quarta proportionalis ad latus tranſverſum b, ad latus rectum a, & ad differentiam ipſius lateris tranſverſi, & abſciſſæ x, ideſt ad $b - x$.

Fig. II. Statuatur A B latus tranſverſum; A C latus rectum; & A M abſciſſa quævis; juncta B C, & ducta MO parallela AC, erit MO valor ipſius $a - \frac{ax}{b}$. Ob ſimilitudinem Triangulorum B A C, B M O. Jam verò omnes quantitates habentes m pro indicio poteſtatis ſunt homogeneæ; & omnes, quæ habent n pro eodem indicio ſunt quoque homogeneæ. Ergo, quia productum ex MO^{m} in AM^{n} deficit à producto, quod fit ex AC^{m} in AM^{n} defectu ſimili, ſimiliterque poſito ei producto, quod ex AC^{m} in AB^{n}; cum latera producentia ſint juxta diagonalem B C; eſt vero A M (x) abſciſſa, & A C (a) latus rectum; atque A B [b] latus tranſverſum; & in hoc ipſo producto deficiente, latus rectum habet minorem poteſtatem, quàm ordinata; habet enim m; ordinata verò $m + n$; abſciſſa autem habet reliquam; alterumque homogeneum productum conſtituens defectum ſimilem, & ſimiliter poſitum conſtat ex eadem lateris recti poteſtate ducta in poteſtatem reliquam lateris tranſverſi, patet propoſitum.

Adplicetur modo æquatio generalis ad deſignandas Ellipſes quaslibet: ſit $m = 1$; & $n = 1$ erit Ellipſis com-

communis ; $y^2 = ax - \frac{axx}{b}$. Sit $m = 2$; & $= n\ 1$; erit Ellipſis Cubica prioris ſpeciei $y^3 = aax - \frac{2aax^2}{b} + \frac{aax^3}{b^2}$. Sit $m = 1$, & $n = 2$; erit Ellipſis Cubica alterius ſpeciei $y^3 = ax^2 - \frac{ax^3}{b}$. Sit $m = 3$. & $n = 1$; erit Ellipſis quadrato-quadratica prioris ſpeciei; $y^4 = aaax - \frac{3aaaxx}{b} + \frac{3aaax^3}{bb} - \frac{aaax^4}{b^3}$. Sit $m = 1$, & $n = 3$; prodibit Ellipſis quadrato-quadratica alterius ſpeciei $y^4 = ax^3 - \frac{ax^4}{b}$ Sit modo $m = 2$. & $n = 2$; erit Ellipſis quadrato-quadratica $y^4 = \overline{a^2 - \frac{2aax}{b} + \frac{aax^2}{b^2}} \times x^2$. Sed hac æquatio reducitur ad $y^2 = \overline{a - \frac{ax}{b}} \times x$; quæ Apolloniana eſt Ellipſis. Ergo patet hoc genus Ellipſium, quod modò ſupra dicebamus in tertio genere non eſſe enumerandum, revera in illo nequaquam poſſe recenſeri.

Et denique, ut ad infinitas hyperbolas gradum faciamus; quemadmodum Conicæ Veterum hyperbolæ ea eſt proprietas, ut quadratum cujuslibet ordinatæ excedat rectangulum ex latere recto in abſciſſam correſpondentem rectangulo alio ſimili, ſimiliter-

terque poſito ei, quod fit ex eodem latere recto in latus tranſverſum; ita recentiores Geometræ hyperbolas alias infinite conſiderarunt; in quibus non quadratum dumtaxat, ſed quævis cujuſque ordinatæ poteſtas excedat homogeneum productum, quod fit ex alia minori poteſtate lateris recti in poteſtatem reliquam abſciſſæ correſpondentis exceſſu ſimili, ſimiliterque poſito alteri producto homogeneo, quod fit ex eadem recti lateris poteſtate in poteſtatem reliquam lateris tranſverſi. Et ex diverſis poteſtatibus, ad quas aſcendere poteſt Ordinata, diverſo modo hyperbolas haſce Recentiores nominarunt; etenim dicuntur hyperbolæ quadraticæ, ſeu primi generis; ſi ordinatæ poteſtas ſit quadratum; Cubicæ, ſive ſecundi generis, ſi ordinata ad Cubum aſcendat, atque ita deinceps.

Unumquodque verò genus hyperbolarum, veluti in Parabolis, & Ellipſibus; modo quadraticæ, ſive hyperbolæ primi generis excipiantur, utpote unius dumtaxat ſpeciei; in varias alias ſpecies dividi poteſt pro diverſis modis, quibus latus rectum cum abſciſſa complicari poteſt, ut productum habeatur homogeneum poteſtati, ad quam aſcendit ordinata. Quare hyperbolæ Cubicæ, ſive ſecundi generis duplicis eſſe poſſunt ſpeciei. Etenim vel in iis Cubus cujuslibet ordinatæ excedit ſolidum, quod fit ex quadrato lateris recti in abſciſſam correſpondentem, exceſſu ſimili, ſimiliterque poſito ei, quod fit ex eodem lateris recti quadrato in latus tranſverſum; & tales hyperbolæ primam ſpeciem conſtituunt; vel ejus ſunt naturæ, ut Cubus cujuſque ordinatæ excedat ſolidum, quod fit ex latere recto in quadratum abſciſſæ correſpondentis exceſsu ſimili, ſimiliterque poſito ei, quod fit ex eodem latere recto in quadratum lateris tranſverſi; & hoc quidem caſu ejuſmodi hyperbolæ ſpeciem alteram component.

Eadem

Eadem ratione duplicis quoque ſpeciei eſſe poſſunt hyperbolæ tertii generis, quæ alio vocabulo quadrato-quadraticæ etiam dicuntur. Siquidem, vel quadrato-quadratum unius cujuſque ordinatæ excedit plano-planum, quod fit ex Cubo lateris recti in abſciſſam correſpondentem exceſſu ſimili, ſimiliterque poſito ei, quod fit ex Cubo ejuſdem lateris recti in latus tranſverſum; & cum hoc contingit, hyperbolæ primam ſpeciem earum, quæ tertii ſunt generis, conſtituunt; vel eam ipſæ habent naturam, ut quadrato-quadratum cujuſquæ ordinatæ excedat plalo-planum, quod fit ex latere recto in Cubum abſciſſæ correſpondentis exceſſu ſimili, ſimiliterque poſito ei, quod ſub eodem latere recto, & Cubo lateris tranſverſi continetur; & tales quidem hyperbolæ ſpeciem alteram efformabunt. Etenim hic quoque, perinde ac in parabolis, & Ellipſibus, notandum occurrit, quòd, tametſi in ejuſmodi tertii generis hyperbolis poſſit quoque quadrato-quadratum unius cujuſque ordinatæ æquari cum plano-plano, quod ſub quadratis lateris recti, & abſciſſæ correſpondentis continetur, addito exceſſu ſimili, ſimiliterque poſito ei, quod fit ex quadrato lateris recti in quadratum lateris tranſverſi; tamen non hinc hyperbolæ, quarum ea eſt natura, ſpeciem alteram hyperbolarum tertii generis conſtituunt: quandoquidem nec tertii generis dici debent; cum, ſi ex utraque parte quadrata radix extrahatur, ad hyperbolas primi generis deprimantur.

Porro æquatio (indicantibus iiſdem litteris eadem, quæ ſupra in Ellipſi) generalis pro omnibus hyperbolis, eſt $y^{m+n} = \overline{a + \frac{a x}{b}}^{\,m} \times x^{n}$ quæ oſtenditur rectè efformata eodem prorſus modo, quo id demonſtra-

ſtratum fuit ſupra in æquatione generali poſita pro omnibus Ellipſibus. Et manifeſtum etiam eſt productum $\overline{a + x}^m \times x^n$ continere productum ex a^m in x^n auctum exceſſu ſimili, ſimiliterque poſito ei, quod ex a^m in b^n. Nam $a + \frac{ax}{b}$ eſt quarta proportionalis ad latus tranſverſum, ad latus rectum, & ad $b + x$ ſummam abſciſſæ, & lateris tranſverſi. Statuatur modo A B latus tranſverſum, A C latus rectum; productâque AB, ſit AM abſciſſa quævis; &, ductâ MO parallela AC, protrahatur A C donec occurrat in O ipſi M O. Erit $MO = a + \frac{ax}{b}$. Idcircoque, quia productum ex MO^m in AM^n excedit productum ex AC^m in AM^n exceſſu ſimili, ſimiliterque poſito ei, quod ex AC^m in AB^n, cum latera producentia ſint juxta eandem diagonalem BO; & reliqua ſint, uti ſupra in Ellipſi, patet propoſitum. Adplicetur modo, uti ſupra in Ellipſi, æquatio generalis ad Curvas deſignandas hyperbolicas cujuſvis generis: & demonſtrabitur eodem etiam modo rejecta bene eſſe ea Curva hyperbolica quadrato-quadratica a tertio genere earum, quam modo juſſimus eſſe inde removendam.

Fig. 12.

Hac ratione recentiores Geometræ Conicas Veterum ſectiones in infinitum extenderunt; & infinitas Parabolas, Ellipſes, & Hyperbolas ad ipſarū ſimilitudinem conſiderarunt. Sed priuſquam ad earum geneſin, & deſcriptionem deveniamus, non a re alienum erit breviter alias nonnullas proprietates memorare, quæ ex ipſa Curvarum natura immediate dependent. Probe tamen adverte nil hic modo à nobis dici, aut poni de harum Curvarum figura, ſitu, & deſcriptione,

ne; neque hunc locum horum eſſe; de quibus nonnulla dicentur in capite inſequenti. Sed ſolùm naturam, & proprietates præcipuas illarum modò enunciamus. Diametroſque dicimus lineas, ad quas ductæ è Curva lineæ ordinatim poſitæ relationem habent cum abſciſſis illarum: & idcirco lineas ejuſmodi nominare *Lineas abſciſſarum* ſolemus.

Igitur dicimus primò, quòd, ſi Curva A N N deſignet unamquamque ex parabolis infinitis; ut poteſtas quævis cujuſque ordinatæ M N æquet productum homogeneum, quod fit ex inferiori poteſtate lateris recti AC in poteſtatem reliquam abſciſſæ AM; quòd inquam, duarum, aut plurium ordinatarum M N poteſtates ſint ut poteſtates abſciſſarum correſpondentium A M. Etenim ſunt poteſtates illæ ut producta homogenea, quæ fiunt ex inferiori poteſtate lateris recti AC in poteſtatem reliquam abſciſſarum correſpondentium A M: unde cum ejuſmodi producta homogenea ſint ut poteſtates abſciſſarum AM, propter communem poteſtatem lateris recti A C; erunt ipſarum M N poteſtates ut poteſtates abſciſſarum correſpondentium A M. Fig. 13.

Hinc ſi A N N ſit Parabola Cubica prioris ſpeciei, ita nempe, ut Cubus cujuſque ordinatæ M N ſit æqualis ſolido, quod fit ex quadrato lateris recti AC in abſciſſam correſpondentem, liquet Cubos duarum, aut plurium ordinatarum M N eſſe mutuo uti abſciſſæ correſpondentes N M; quandoquidem ſolidalis Cubis æqualia propter commune quadratū lateris recti A C, eam inter ſe habent rationem, quæ eſt inter abſciſſas, & correſpondentes A M. Sed, ſi eadem Curva A N N ſit Parabola Cubica ſecundæ ſpeciei; ita ſcilicet ut Cubus cujuſque ordinatæ M N æqualis ſit ſolido, quod fit ex latere rectò A C in quadratum abſciſſæ correſpondentis AM; palam eſt, Cubos

bos duarum, aut plurium ordinatarum MN eſſe ut quadrata correſpondentium abſciſſarum AM; ſiquidem ſolida iis Cubis æqualia, propter communem altitudinem lateris recti AC, ſunt uti dicta abſciſſarum quadrata.

Fig. 14. Secundò, quòd, ſi Curva ANN deſignet quamlibet ex Ellipſibus infinitis; ita nempe ut exiſtente AC latere recto, poteſtas quævis cujuſque ordinatæ MN adæquet homogenum productum, quod fit ex inferiori poteſtate rectæ MO in poteſtatem reliquam abſciſsæ correſpondentis AM; quòd, inquam, eadem ordinatæ MN poteſtas ſit ad homogenum productum, quod fit ex eadem poteſtate abſciſsæ AM in poteſtatem reliquam alterius portionis MB, ut ea lateris recti AC poteſtas, ad quam aſcendit ipſa MB, aut MO ad homogeneam poteſtatem lateris tranſverſi AB. Quamobrem ſi curva ANB ſit Ellipſis Cubica prioris ſpeciei, in qua nempe Cubus ordinatæ MN adæquet ſolidum, quod fit ex abſciſsa AM in quadratum rectæ MO, palam eſt, Cubum ejuſdem ordinatæ MN eſſe ad ſolidum AM in MB quadratum, uti AC quadratum ad AB quadratum: & conſequenter Cubos duarum, aut plurium ordinatarum MN eſſe inter ſe, uti correſpondentia producta, quæ fiunt ex abſciſſis AM in quadrata reliquarum portionum MB. At vero ſi eadem Curva ANB ſit Ellipſis Cubica alterius ſpeciei, in qua nempe Cubus ordinatæ MN adæquat ſolidum ex quadrato abſciſsæ AM in rectam MO, liquet, Cubum ejuſdem ordinatæ MN eſſe ad ſolidum ex AM quadrato in reliquam portionem MB, ut latus rectum AC ad latus tranſverſum AB, proindeque Cubos duarum, aut plurium ordinatarum MN eſſe inter ſe ut ſolida correſpondentia, quæ fiunt ex quadratis abſciſſarum AM in portiones reliquas MB.

Et

Fig. 15.

Et denique ſi Curva A N N deſignet quamlibet ex hyperbolis infinitis, ita ſcilicet, ut exiſtente A B latere tranſverſo, & AC latere recto, poteſtas quævis cujuſvis ordinatæ M N adæquet homogeneum productum, quod fit ex inferiori poteſtate rectæ M O in poteſtatem reliquam abſciſſæ correſpondentis A M, quod, inquam, eadem ordinatæ M N poteſtas ſit ad homogeneum productum, quod fit ex eadem poteſtate abſciſſæ A M in poteſtatem reliquam alterius portionis M B, ex alio lateris tranſverſi termino ſumptæ, uti eſt ea lateris recti AC poteſtas, ad quam aſcendit ipſa M B, aut MO, ad homogeneam poteſtatem lateris tranſverſi A B: quare ſi Curva A N ſit hyperbola Cubica prioris ſpeciei, quia, ex dictis, hujus hyperbolæ ea eſt proprietas, ut Cubus cujuſque ordinatæ M N adæquet ſolidum, quod fit ex abſciſſa correſpondente A M in quadratum rectæ M O, erit Cubus ejuſdem ordinatæ M N ad ſolidum, quod fit ex abſciſſa A M in quadratum portionis M B, ut eſt A C quadratum ad AB quadratum: conſequenter Cubi duarum, aut plurium ordinatarum M N erunt inter ſe uti ſolida, quæ fiunt ex abſciſſis correſpondentibus A M in quadrata portionum M B: &, ſi eadem Curva A N ſit hyperbola Cubica alterius ſpeciei, quia alterius hujus hyperbolæ ea eſt proprietas, ut Cubus cujuſque ordinatæ M N adæquet ſolidum, quod fit ex quadrato abſciſſæ A M in rectam MO, erit Cubus ejuſdem ordinatæ M N ad ſolidum, quod fit ex quadrato abſciſſæ A M in portionem M B, ut eſt A C ad A B; & conſequenter Cubi duarum, aut plurium ordinatarum M N erunt inter ſe uti ſolida, quæ fiunt ex quadratis correſpondentium abſciſſarum A M in portiones M B.

CAPUT IV.

CONICARUM SECTIONUM Cujuſvis generis Deſcriptio.

ANalyticè procedimus. Poſtquam naturam Curvarum Conicarum infinitè productarum expoſuimus, earum præbere debemus deſcriptionem. Sola enunciatio naturæ, proprietatiſque Curvæ ſine deſcriptione, inane fere continet mentis commentum. Deſcriptio cujuſvis Curvæ ad duos modos generatim revocari poteſt. Alter eſt modus Organicus, ſeu Mecanicus; qui ad effectionem, vel, uti ajunt, ad praxim revocari poteſt. Alter eſt Geometricus; qui adcurate ad praxim nequit perduci. Deſcriptiones omnes Curvarum confectæ ſupra corpora ſolida; & deſcriptiones effectæ in plano per inſtrumenta Mechanica, aut lignea, aut metallica, ſive per fila, ſive per regulas, motu adhibito, ſunt deſcriptiones primi generis. Deſcriptiones verò deductæ ex proprietate aliqua Curvæ (expeditior ſemper, clariorque proprietas eſt deligenda) ſunt deſcriptiones generis poſterioris. Deſcribitur ſeries punctorum, ſeu deſcribuntur puncta continuata, locataque juxta hanc proprietatem; & ſuper illis Curva delineatur, quæ ad inflexum quæſitum proximè quidem accedit, non tamen exactè. Sic ſi deſcribantur puncta continuata A A A in extremitatibus linearum A N; quæ A N ſint ſemper mediæ proportionales inter B N, & N D ſegmenta datæ longitu-

Fig. 16

gitu-

gitudine rectæ lineæ B D, ſintque ex B D normaliter excitatæ; ducatur vero ſupra A A A Curva B A D; hæc erit ſemicirculus: quòd ſi idem ex alia parte fiat eodem modo, Circulus integer deſcribetur. Geometrica verò erit Circuli deſcriptio; non exactè, uti vides, ad praxim deducenda: & manifeſtum eſt, organicas Curvarum deſcriptiones quovis modo acceptas longe præferendas eſſe Geometricis.

Veteres Geometræ Parabolæ, Ellipſis, & Hyperbolæ generationem tradituri eam ex varia Coni per planum ſectione deduxerunt: indeque factum eſt, ut Curvas illas nominarint Conicas ſectiones. Etenim concipiebant ex. gr. Conum A B C, primò ſectum plano per axem pertranſeunte, ut fieret triangulum maximum BAC; tùm eumdem Conum ſecabant alio plano, quod ad baſim Coni inclinatum rectum eſſet ad Baſim triang. per axem ſecti BC. Eſt vero Conica ſuperficies ea, quam deſcribit recta linea ex puncto aliquo ſublimi ad circuli circumferentiam ducta; ſi, fixo manente illo puncto ſublimi, linea percurrit circuli circumferentiam, donec ad eumdem redeat locum, unde cœperat moveri. Eſt autem Conus corpus ſolidum Conica ſuperficie, & circulo ipſo tamquam baſi contentum. Fig. 17.

Hinc, ſi ſecundum planum dictum ita ſit ad baſim Coni inclinatum, ut uni laterum ipſius trianguli æquidiſtet, generabitur ſectio Coni Parabolica: ſi vero taliter inclinetur, ut utrique lateri in ipſo Cono occurrat, producetur ſectio Coni Elliptica; quæ poterit etiam eſſe circuli circumferentia, ſi ſcilicet planum ſecans ſubcontrarie occurrat plano baſis; ita nempe ut ex triang. per axem aliud triang. ipſi ſimile abſcindat: & ſi denique planum ſecans ita fuerit ad baſim Coni inclinatum, ut unum latus in Cono, alterum extra Conum productum offendat, ſectio

 orie-

orietur hyperbolica. In his omnibus caſibus diameter exortæ ſectionis erit linea illa, quæ eſt communis ſectio plani ſecantis cum plano triang. per axem ſecti: ordinatæ erunt omnes illæ rectæ lineæ, quæ ducuntur æquidiſtantes ei, in qua planum ſecans occurrit plano baſis, & quæ perpendicularis eſt baſi triang. per axem ſecti B G.

Hæc omnia exinde deducuntur, quòd ſi Conus plano ſecetur æquidiſtante plano baſis; ſectio in Coni ſuperficie orta, æque ac ipſa baſis, eſt Circuli circumferentia: id quod ex ipſa Coni geneſi modo expoſita promanat; & in Conicis demonſtratur. Et quidem palam eſt, Conum aliud non eſſe, quàm ſeriem plurium circulorum ita quidem inter ſe ordinatorum, ut eorum diametri minores majoribus ordine inſiſtentes, in Arithmetica proportione exiſtant: unde cum omnes ii Circuli ſint plano baſis æquidistantes; patet utique, ſecto Cono per planum æquidiſtans baſi, ſectionem in Coni ſuperficie confectam, perinde ac ipſius baſis perimetrum, eſſe circuli circumferentiam. Et, cum eorum omnium circulorum centra ſint in axe Coni, ſcilicet in illa recta linea, quæ ex vertice Coni ad centrum baſis ducitur; patet etiam diametrum circuli confecti per planum baſi æquidiſtans, & ſecans, eſſe rectam illam lineam, quæ eſt communis ſectio plani ſecantis, cum plano trianguli per axem ſecti, quippe quæ per ipſius centrum tranſiicitur.

Fig 18. Secetur primò Conus A B C plano, quod inſiſtens ad angulos rectos Baſi B C triang. per axem ſecti B A C, taliter ſit ad planum baſis Coni inclinatum, ut communis ejus ſectio cum plano triang. E G ſit parallela lateri uni A B ejuſdem triang. & facta ſit in Coni ſuperficie ſectio D E F. Sumatur in E G punctum quodvis aliud I, per I agatur recta H I L parallela

lela BC: & agatur planum HML æquidiſtans plano baſis; ſitque MN communis ſectio alterius hujus plani cum plano DEF. Erit MN perpendicularis ipſi IHL, cum DF ad rectos ang. inſiſtat ipſi BC; & ſint parallelæ MN, DF, quia ſunt parallelæ BC, HL. Et quoniam BC, HL ſunt diametri circulorum BDC, HML, atque iis ſunt perpendiculares rectæ DF, MN, erit per circuli naturam tum DG quadratum æquale rectang. BGC, quùm MI quadratum æquale rectang. HIL. Ergo ut DG quadratum ad MI quadratum, ita rectangulum BGG, ad rectangulum HIL, ſeu uti GC, ad IL, vel etiam uti EG ad EI, cum ſimilia ſint triang. EGC, EIL; quare erit ex æqua ratione, DG quadratum ad MI quadratum, uti EG ad EI; proindeque ſectio facta DEF erit illa eadem Curva linea quæ *Parabola* appellatur.

Secundò ſecetur idem Conus ABC plano, quod inſiſtens etiam ad rectos angulos baſi triang. per axem ſecti BC taliter ſit ad planum baſis Coni inclinatum, ut recta EG communis ſectio plani ſecantis cum plano triang. alterius producta occurat lateri alteri AB in ipſo Cono in puncto P. Et ſit facta in ſuperficie Coni ſectio DEF. Sumatur quodvis aliud punctum I in ipſa EG, uti antea, per quod agatur primò recta HIL parallela baſi trianguli BC; tum Planum HML planum baſis BDC æquidiſtans; eritque ſimiliter recta MN, communis ſectio alterius hujus plani ſecantis cum plano DEF, ipſi HL perpendicularis; perinde ac DF perpendicularis eſt ipſi BC. His poſitis: quoniam rectæ BC, HL ſunt Diametri circulorum BDC, HML, atque iis ad rectos angulos inſiſtunt rectæ DF, MN; erit per Circuli naturam tùm DG quadratum æquale rectang. BGC, quùm MI quadratum æquale rectang. HIL: proindeque erit ut DG quadratum ad MI quadratum, ita rectang. BGC ad rectang. Fig. 19.

ctang. HIL. Sed rectang. BGC eſt ad rectang. HIL in ratione compoſita ex BG ad HI, & ex GC ad IL, ſive etiam in ratione compoſita ex PG ad PI, & ex EG ad EI; cum ſimilia ſint triangula PBG, PHI, & triang. CGE, LIE; aut denique, componendo has rationes, uti rectang. PGE, ad rectang. PIE, ergo erit, ex æqua ratione, ut DG quadratum, ad MI quadratum, ita rectangulum PGE ad rectangulum PIE: idcircoque ſectio DEF facta erit illa eadem Curva linea quæ *Ellipſis* nominatur.

Poteſt autem eadem ſectio DEF eſſe circuli circumferentia; ſi ſcilicet planum ſecans DEF ſit ſubcontrarie poſitum plano baſis, ita nempe ut EGP communis ſectio plani ſecantis cum plano trianguli per axem abſcindat triangulum PAE ſimile triangulo CAB; ſed eidem ſubcontrarie poſitum, ita ut ang. APE, æqualis ſit angulo ACB; & ang. AEP æqualis ang. ABC. Nam tum triang. BGP, EGC erunt ſimilia. Unde, cum ob hanc ſimilitudinem BG ſit ad GP, uti GE ad GC erit rectang. BGC æquale rectang. PGE; & conſequenter, quia rectangulo BGC æquale eſt DG quadratum, erit idem DG quadrato æquale etiam rectang. PGE. Oſtenſum eſt autem DG quadratum eſſe ad MI quadratum, ut rectang. PGE; ad rectang. PIE, igitur erit etiam rectangulum PIE æquale MI quadrato. Quare, ſi DF, MN, ipſi GE ſint perpendiculares; quod quidem contingit cum planum DEF ad ang. rectos occurrit ipſi BGC; quia Curva DEF eſt ejus naturæ, ut, demiſſa ad rectam PE quavis perpendiculari MI, ſit ſemper MI quadratum æquale rectangulo PIE; liquet eam eſſe Circuli circumferentiam, ejuſque diametrum eſſe rectam PE.

Fig. 20. Secetur denique idem Conus ABC plano, quod occurrens plano baſis in recta linea DF, perpendicula-

Digitized by Google

culariter ad baſin trianguli inſiſtente, taliter ſit ad ipſum planum baſis inclinatum, ut lateri alteri ejuſdem triang. A B occurrat, ſed extra Conum producto in puncto P; recta GE communis ſectio plani hujus ſecantis cum plano triang. per axem ſecti ſit quidem; atque ſit confecta in Coni ſuperficie ſectio D E F. Sumatur modo hic etiam in ipſa E G quodvis aliud punctum I per quod agatur tùm recta HL ipſi BC parallela, quùm Planum H M L æquidiſtans plano baſis BDC: ſitque M N communis ſectio alterius hujus plani cum plano D E F; quæ erit propterea ipſi H L perpendicularis. Et quoniam rectæ BC, H L ſunt diametri Circulorum BDC H M L, atque iis ad rectos ang. inſiſtunt rectæ DF, MN; erit per Circuli naturam tùm DG quadratum æquale rectang. BGE, quùm M I quadratum æquale rectang. H I L: adeoque erit ut DG quadratum ad M I quadratum, ita rectangulum BGC ad rectang. H I L. Jam vero rectang. BGC eſt ad rectang. H I L in ratione compoſita ex B G ad H I, & ex GC ad I L; ſive etiam in ratione compoſita ex PG, ad PI, & ex GE ad I E; cum ſimilia ſint tùm triang. P B G, P H I; quùm triangula E G C, E I L; aut denique, componendo has rationes, ut rectangulum PGE ad rectang. P I E; igitur erit ex æqua ratione, ut BG quadratum ad M I quadratum; ita rectangulum P G E ad rectang. P I E. Proindeque liquet, ſectionem D E F hoc pacto in Coni ſuperficie reſectam eſſe eamdem illam lineam Curvam, quæ dicitur *Hyperboles*.

Hac igitur ratione ex varia Coni ſectione per planum Veteres Geometræ Parabolæ, Ellipſis, Hyperbolæ geneſim tradidere. Sed, cum Recentiores infinitas Parabolas, infinitas Ellipſes, & infinitas demum hyperbolas ad illorum ſimilitudinem excogitaverint, opus

Digitized by Google

opus ipſis fuit Conos alios ſuperioris generis efformare, ut ex varia eorum ſectione omnium illarum Curvarum geneſis obtineretur. Ad hoc Circulos etiam alios in infinitum excogitarunt; in quibus non quadratum duntaxat demiſſæ perpendicularis ad diametrum, ſed quælibet ejus poteſtas æqualis ſit homogeneo producto ex aliis minoribus poteſtatibus portionum diametri, ut ſatis ſupra diximus; unde, quemadmodum Veterum Conus pro baſi Circulum vulgarem habebat, ita & apud Recentiores alii Coni Circulos hos infinitos habent pro baſibus.

Et quidem quemadmodum Veterum Ellipſis in circulum mutatur, cum, ordinatis ad rectos ang. inſiſtentibus abſciſſis, latus rectum æquat latus tranſverſum; ita & recentiorum Ellipſes infinitæ in Circulos infinitos tranſibunt, ſi ſimiliter ordinatæ & perpendiculariter inſiſtant abſciſſis, & ipſarum latus rectum adæquet latus tranſverſum. Ratio eſt. Nam ſicuti in Ellipſi Veterum quadratum cujuſvis ordinatæ eſt ad rectang. ſub lateris tranſverſi portionibus contentum, uti latus rectum ad latus ipſum traſverſum; adeoque, ſuppoſita æqualitate lateris recti, & lateris tranſverſi, quadratum ejuſdem ordinatæ adæquat rectang. ſub dictis portionibus contentum; quæ eſt proprietas prima Circuli; modo tamen ordinata ad rectos angulos tranſverſo lateri occurrat: ita etiam in Ellipſibus infinitis Recentiorum, poteſtas cujuſvis ordinatæ eſt ad productum homogeneum, quod ſit ex poteſtate inferiori abſciſſæ correſpondentis in poteſtatem reliquam alterius portionis lateris tranſverſi, ut eſt ea lateris recti poteſtas, ad quam aſcendit altera illa portio, ad homogeneam poteſtatem lateris tranſverſi. Hinc, ſuppoſita æqualitate lateris recti, & tranſverſi, poteſtas ejuſdem ordinatæ ſit æqualis producto homogeneo ex inferiori poteſtate abſciſſæ correſ-

reſpondentis in poteſtatem reliquam alterius portionis, quæ eſt proprietas circulorum infinitorum. Dummodo tamen ordinatæ ad ang. rectos tranſverſo lateri occurrant. Quare eadem omnia, quæ de infinitis Ellipſibus, & etiam de variis earum generibus ſupra diximus, locum etiam habent in Circulis infinitis.

Circulus Cubicus, uti ceteræ omnes Curvæ numero imparium dimenſionum, in ſe redire nequaquam poteſt; ſed pergit in infinitum. Quare in duobus punctis ſecare minime valet lineam rectam datam, determinatamque longitudine, cujus abſciſſæ relationem habeat cum ordinatis, quæ radices ſunt æquationis Curvæ. Ita, ſi ADB ſit Cubica Curva, & AB recta datæ longitudinis; & ſint $MN^3 = AN^2$ in NB; vel $= AN$ in NB^2; non ſecabit ADB in duobus punctis AB; ſecus acceptis NO ex altera parte æqualibus NM, & ad eundem angulum ſupra AB; ita ut fiant quoque $NO^3 = AN^2$ in NB, vel $= AN$ in NB^2; Curva AO per continuata puncta O perducta permearet quoque per B, ſecaretque AB, & ADB in B; & Curva eſſet in ſe rediens: quod abſurdum. His poſitis. Concipiatur primo Curva CDE Circulis quilibet numero imparium dimenſionum in ſe non rediens; cujus linea abſciſſarum CB. Sit punctum A ſublime in alio plano: & linea AC utrimque indefinite producta, perque CDE peripheriam circumducta ſuperficiem Conicam imperfectam ACDE utrimque generabit; quæ concludatur, finiaturque triangulo AEB conſtituto a junctis AE, EB, AB: & Solidum hac ſuperficie contentum erit Semiconus imperfectus, vel mixtilineus CEABE conſtans ex figura Curva ACE, & recta AEB. Manifeſtum vero eſt, ſectio

Fig. 21.

Fig. 22.

Cono

Cono plano per verticem A offendente baſim in CB, ſectionem A B C eſſe triangulum maximum. Secetur modo hæc figura plano alio HNML parallelo plano baſis *B E D C*; erit H N M L ſectio ſimilis, ſimiliterque poſita baſi BEDC; & A H N Triangulum, ac NML Circulus ejuſdem naturæ, cum ſubjecta baſi. Nam eſt quidem H N, communis ſectio plani ſecantis, & trianguli ABE, linea recta parallela B E ex conſtructione; (& *16. xi. Element.*). Quare A H N triangulum erit ſimile triang. A B E. Modo erit H L, communis ſectio plani ſecantis, & triang. ABC, parallela eadem ratione ipſi BC. Accipiatur M punctum quodvis in ſectione genita; jungatur A M, quæ protrahatur occurrens plano baſis in D. Agatur AG ex A ad *BC*, & ſit G punctum in ipſamet linea B C. Jungantur D G, M I; quæ ſunt communes ſectiones trianguli A D G cum planis parallelis; idcircoque parallelæ. Igitur erit DG. MI :: GC. IL :: GB. IH. Quare DG^3. MI^3 :: GC^2 in GB. IL^2 in IH. Sive etiam DG^3. MI^3 :: GC in GB^2 IL in IH^2. Eſt vero $DG^3 = GC^2$ in GB; ſeu $=$ GC in GB^2. Ergo erit quoque $MI^3 = IL^2$ in I H; ſive $=$ IL in IH^2. Sumptum vero fuit M punctum in ſectione quodvis. Quare ſectio N M L erit Circulus Cubicus ejuſdem naturæ cum Circulo baſis, ſimiliſque ei, & poſitus ſimiliter Q. E. D. Hæc ſpectant ad caſum, quo Circulus Cubicus, aut alius ex infinitis non occurrit cum linea abſciſſarum niſi in uno puncto. Quod ſi in duobus, aut pluribus punctis nonnulli Circuli ex his infinitis, de quibus agimus, cum illa occurrit; facilis ſane erit ex his, quæ modo diximus,

(ne-

(neceſſaria quidem obſervatu pro eo caſu Circulorum,) & ex iis, quæ vulgo traduntur in Conicis, intelligentia Conicæ figuræ, quæ poterit ſupra illos generari pro ſectionibus in ipſa Conica figura faciendis, quæ infinitas noſtras Curvas deſcribant.

Ne vero aliquid deſideretur; æquatio generalis Circulorum omnium in infinitum productorum erit $y^{m+n} = x^m \overline{X\,a - x}^n$; eadem ac æquatio generalis Ellipſium; differentiæ vero ſunt, quas nuper ſupra docuimus. Hic ſi $m = 1$ & $n = 2$. Erit Circulus Cubicus prioris ſpeciei, $y^3 = aax - 2axx + x^3$. Si vero $m = 2$ & $n = 1$. Erit Cubicus Circulus alterius ſpeciei $y^3 = axx - x^3$. Et ita de reliquis.

His poſitis; concipiatur Conus ABC cujus baſis BDC repræſentet aliquem quemvis ex circulis infinitis modo explicatis, ut poteſtas quævis cujuſvis ordinatæ DG adæquet productum homogeneum ex aliis duabus inferioribus poteſtatibus portionum correſpondentiũ BG, GC lineæ abſciſſarũ BC; ſi modo, ſecto hoc Cono plano, quod per verticem tranſiens offendat planum baſis in ipſa linea BC, ita ut fiat triang. maximum BAC; & dein ſecetur idem Conus BAC plano alio, quod occurrat plano baſis in recta DE ipſi BC perpendiculari; & fiat ſectio; juxta varias alterius iſtius plani poſitiones habebuntur omnes illæ Curvæ infinitæ à Recentioribus excogitatæ. Nam ſiquidem hoc planum taliter ſit inclinatum, ut recta EG communis ſectio plani ſecantis cum plano trianguli, ſit lateri AB parallela; generabuntur infinitæ Parabolæ; & varii generis, juxta varia generea circulorum, qui ſunt baſes Coni: ſi vero taliter inclinetur, ut eadem recta EG occurrat lateri alteri AB in ipſo Cono, orientur infinitæ Ellipſes uti ſupra; quæ poterunt quoque Fig 23.

Google

eſſe Circuli infiniti juxta dicta. Et varia Ellipſium genera procreabuntur juxta varia genera circulorum, qui ſunt baſes Coni. Ac denique ſi ita fuerit inclinatum, ut eadem recta EG lateri alteri AB occurrat extra Conum uti ſupra; producentur infinitæ hyperbolæ; & varia earum genera juxta varia genera Circulorum, qui ſunt baſes Coni. Atque in omnibus his caſibus ortæ ſectionis diameter, ſive linea abſciſſarum erit ipſa recta EG; ordinatæ verò omnes rectæ, quæ ipſi DGF parallelæ ducuntur.

Fig. 24. Et quidem ſit primo recta EG parallela lateri AB; &, ſumpto in ea quovis alio puncto I, agatur per illud recta HIL parallela BC; tum planum HML plano baſis BDC agatur æquidiſtans, ſitque MI communis ſectio alterius hujus plani cum plano DE; quæ cum ſit ipſi DG parallela, erit quoque rectæ HL perpendicularis. Et quoniam ex geneſi Coni, & ex iis, quæ dicta ſupra ſunt, cum agebatur de Circulis numero imparium dimenſionum, qui ſint baſes Coni, ipſi Circuli BDC, HML ſunt ejuſdem non modo generis, ſed etiam naturæ, & ſpeciei; jam, ſi *m* dicatur exponens poteſtatis, ad quam aſcendit portio una BG lineæ abſciſſarum BC ipſius Circuli, qui eſt baſis Coni, & *n* dicatur exponens poteſtatis, ad quam aſcendit portio altera GC, ita ut in baſi ipſa ſemper ſit, uti diximus, $DG^{m+n} = BG^{m}$ in GC^{n}; erit tùm $DG^{m+n} = BG^{m}$ in GC^{n}, quùm $MI^{m+n} = HI^{m}$ in IL^{n}. Ergo erit ut DG^{m+n} ad MI^{m+n} ita BG^{m} in GC^{n} ad HI^{m} in IL^{n}. Sed propter parallelogram. GH, eſt $BG^{m} = HI^{m}$. Igitur erit BG^{m} in GC^{n} ad HI^{m}

in IL^{n}

in IL^n, veluti GC^m ad IL^n; ac idcirco, quia propter ſimilia triang. EGC, EIL; eſt GC^n ad IL^n uti EG^n ad EI^n; erit, ex æquali, uti DG^{m+n} ad MI^{m+n} ita EG^n ad EI^n; ergo ſectio DE erit illa Curva linea, quæ quamlibet ex infinitis Parabolis poteſt repræſentare. Si baſis Coni BDC ſit Circulus Cubicus prioris ſpeciei, erit DE ſectio Parabolica Cubica prioris ſpeciei; ſi ſit Circulus Cubicus alterius ſpeciei; erit ſectio Parabolica Cubica alterius ſpeciei; ſi ſit Circulus Cubicus quadrato-quadraticus, erit ſectio Parabolica quadrato-quadratica, atque ita de reliquis.

Sit ſecundò planum baſis ſecans DE taliter ad planum baſis BDC inclinatum, ut recta EG communis ſectio plani ſecantis cum triangulo per verticem occurrat lateri AB in ipſo Cono in puncto P. Fig. 25.
Et poſita ſint omnia, quæ ſuprà. Erit etiam DG^{m+n} ad MI^{m+n} uti BG^m in GC^n ad HI^m in IL^n. Et quoniam BG^m in GC^n eſt ad HI^m in IL^n in ratione compoſita ex BG^m ad HI^m & ex GC^n ad IL^n; profectò quia propter ſimilitudinem triangulorum PBG, PHI; eſt BG^m ad HI^m uti PG^m ad PI^m; atque etiam propter ſimilia triangula CGE, LIE, eſt GC^n ad IL^n uti GE^n ad IE^n; erit BG^m in GC^n ad HI^m in IL^n in ratione compoſita ex PG^m ad PI^m, & ex GE^n ad IE^n; ſive componendo has rationes, uti PG^m in GE^n ad PI^m in

in IE^n. Quare erit ex æqua ratione, uti DG^{m+n} ad MI^{m+n} ita PG^m in GE^n ad PI^m in IE^n. Ergo ſectio DE erit illa eadem Curva, cui infinitarum Ellipſium convenit natura. Et eodem modo, ſi Circulus baſis Coni ſit Cubicus alterutrius ſpeciei, vel quadrato - quadraticus [& ita de reliquis cujuſvis ſpeciei] ſectio DE Elliptica erit ejuſdem ſpeciei.

Fiet vero figura, ſeu ſectio Elliptica DE aliquis ex Circulis infinitis; ſi planum DE inſiſtat ad angulos rectos plano baſis BDC, & BG^m ad PG^m ſit ut GE^n ad GC^n. Nam tum erit PG^m in GE^n = BG^m in GC^n. Unde quia etiam ipſi BG^m in GC^n æqualis eſt poteſtas ipſius DG, cujus index eſt $m+n$; erit etiam $DG^{m+n} = PG^m$ in GE^n. Oſtenſum vero eſt, DG^{m+n} eſſe ad MI^{m+n} uti eſt PG^m in GE^n ad PI^m in IE^n; quare erit etiam $MI^{m+n} = PI^m$ in IE^n: ac proinde quia Curva DE eſt talis naturæ, ut demiſſa MI qualibet normali ad PE, quælibet poteſtas MI æquet productum homogeneum, quod ex aliis duabus minoribus poteſtatibus correſpondentium portionum PI, IE; liquet eam repræſentare unumquemque ex Circulis infinitis; & eſſe ejuſdem tum generis, tum ſpeciei cum Circulo BDC, qui baſis eſt Coni.

Fig. 26. Sit denique idem planum ſecans DE taliter inclinatum ad planum baſis BDC, ut eadem communis ſectio EG occurrat alteri lateri AB extra Conum productio in puncto P; & factis ſimiliter omnibus uti antea, erit quoque DG^{m+n} ad MI^{m+n} uti BG^m

in

in GC^n ad HI^m in IL^n. Jam vero BG^m in GC^n eſt ad HI^m in IL^n in ratione compoſita ex BG^m ad HI^m, & ex GC^n ad IL^n. Igitur, quia propter ſimilitudinem triangulorum PBG, PHI, eſt BG^m ad HI^m uti PG^m ad PI^m: & propter ſimilitudinem triangulorum EGC, EIL, eſt GC^n ad IL^n uti EG^n ad EI^n; erit BG^m in GC^n ad HI^m in IL^n in ratione compoſita ex PG^m ad PI^m, & ex EG^n ad IE^n. Sive, componendo has rationes, uti PG^m in GE^n ad PI^m in IE^n. Ergo erit, ex æqua ratione, DG^{m+n} ad MI^{m+n} ita PG^m in GE^n ad PI^m in IE^n. Quæ proprietas generatim ſpectans ad omnes hyperbolas. Quare ſectio DME erit illa eadem Curva linea, quæ unamquamque ex infinitis hyperbolis poteſt repræſentare. Et ſi baſis Coni ſit Circulus Cubicus alterutrius ſpeciei, vel quadrato - quadraticus, & ita de reliquis cujuſvis ſpeciei, erit ſectio DME Curva hyperbolica ſimilis omnino ſpeciei.

Sectiones Conicas quaslibet in Cono deſcriptas contemplati ſumus, nulla tamen ratione habita parametri, ſeu lateris recti in ejuſmodi deſcritionibus inventi. De hac re nonnulla adiiciemus. Quantùm ad ſectiones Conicas Apollonianas, vulgò id traditur in Conicis. Igitur dicemus de his Curvis infinitè productis, initium a Parabolis ſumentes. Sit Conus BAC, & fiat ſectio per verticem triangularis BAC. Fig. 27.
Et ſit baſis Coni Circulus Cubicus; fiatque more conſueto

ſueto ſectio MKN per planum parallelum baſi: & in Circulo Cubico baſi Coni ſit $DG^3 = CG^2$ in BG; inque alio parallelo ea ratione ſit $KL^3 = NL^2$ in LM: ſunt jam DG, KL ordinatæ horum Circulorum. Modo quæratur Parabola Cubica prioris ſpeciei: erecta ex puncto F normali FH; ſi fiat $BC^3 . BA^2$ in $AC :: HF^2 . FA^2$; facta ſectione more conſueto Parabolarum, erit FD Parabola Cubica prioris ſpeciei in Cono deſcripta, cujus parameter ipſa FH. Oportet autem, ut planum ſecans, communiſque ſectio FG locetur in ea parte, in qua eſt BG, ſeu ML ad minorem, vel ſimplicem poteſtatem evecta in ſolido GC^2 in $GB = DG^3$: vel ML in $LN^2 = KL^3$. Etenim $HF^2 . FA^2 :: BC^3 . BA^2$ in AC. Quare erit HF^2 ad FA^2 in ratione compoſita ex BC ad AC, & ex BC^2 ad BA^2. Sive in ratione compoſita ex MN ad NA, vel ML ad LF; & ex MN^2 ad MA^2, vel ML^2 ad MF^2; aut etiam LN^2 ad FA^2. Igitur erit $HF^2 . FA^2 :: ML$ in $LN^2 . LF$ in FA^2. Nunc eſt $HF^2 . FA^2 :: HF^2$ in $FL . FA^2$ in FL. Ergo ML in $LN^2 . LF$ in $FA^2 :: HF^2$ in $FL . FA^2$ in FL. Idcircoque ML in $NL^2 = HF^2$ in FL. Sed ML in $NL^2 = KL^3$. Quare etiam $KL^3 = HF^2$ in FL. Igitur HF erit parameter Parabolæ hujus Cubicæ prioris ſpeciei in Cono deſcriptæ Q. E. O.

Si vero

Si verò, præſtitis omnibus quæ antea, fiat [*eadem Figura*] $BC^3 . BA$ in $AC^2 :: HF. FA$. Erit HF parameter Parabolæ Cubicæ ſecundæ ſpeciei. Oportet autem, ut ſectio fiat ex parte, in qua eſt BG^2, ſive ML^2, ideſt ſegmentum majoris poteſtatis in ſolido BG^2 in $GC = DG^3$, vel ML^2 in $LN = KL^3$: quod ſi fiat $BC^4 . BA^3$ in $AC :: HF^3 . FA^3$, & fiant omnia, quæ oportet in Cono deſcripto, uti opus; erit HF parameter quadrato - quadraticæ Parabolæ primæ ſpeciei. Si $BC^4 . BA$ in $AC^3 :: HF. FA$. Erit eadem AF parameter quadrato - quadraticæ Parabolæ ſecundæ ſpeciei. Semper verò oportet, ut, cum in Curvis hiſce parameter habet majorem poteſtatem, quàm abſciſſa; ſectio locetur ex parte, in qua unum ſegmentum lineæ abſciſſarum baſis Coni, ſicuti & alterius Circuli paralleli, habet minorem poteſtatem, quàm alterum, vel etiam ſimplicem. Contra verò cum in Curvis hiſce parameter habet minorem poteſtatem, quàm abſciſſa; ſectio locanda eſt ex parte, in qua unum ſegmentum lineæ abſciſſarum baſis Coni, vel alterius Circuli paralleli, habet majorem poteſtatem, quàm alterum ſegmentum ejuſdemmet lineæ abſciſſarum.

Demonſtratur autem caſus Parabolæ Cubicæ ſecundæ ſpeciei cum ſua adpoſita conditione, hoc pacto. Nam ſit (*eadem Figura*) Conus BAC: & omnia ponantur uti antea; at, ob conditionem, debet eſſe $DG^3 = BG^2$ in GC [unde $KL^3 = ML^2$ in LN]; ita enim eſt locata in Figura ſectio ipſa FDK, &

ipſa etiam F G communis ſectio plani ſecantis cum triangulo per verticem, ſeu linea abſciſſarum, ut ſit ea ex parte B G, ſeu M L ad poteſtatem eductæ majorem. Modo eſt H F . F A :: B C^2. B A in A C^2. Quare H F ad F A rationem habebit compoſitam ex ratione B C ad B A, & BC^2 ad AC^2; ſive compoſitam ex M N ad M A, vel M L ad M F, ſive etiam L N ad F A, & ex M N^2 ad N A^2, vel M L^2 ad L F^2. Igitur HF. FA :: LN in LM^2. F A in L F^2. Sed H F. FA :: HF in LF^2. F A in L F^2. Hinc LN in LM^2 . FA in LF^2 :: HF in L F^2. FA in LF^2. Atque idcirco LN in LM^2 = HF in L F^2; ſive H F in L F^2 = K L^3. Quare Curva erit Parabolica ſecundæ ſpeciei. Et faciles ſunt demonſtrationes eodem modo inſtituendæ pro reliquis caſibus. Et ita etiam de reliquis Curvis Parabolis; & de conditione adpoſita locationis, ſeu ſitûs plani ſecantis, & ſectionis ejus cum triangulo per axem eſt dicendum; quorum intelligentiæ lumen ſatis adferent, quæ modo diximus, expoſitæque demonſtrationes.

Porro, ſicuti deſcribetur in dato Cono Parabola quadratica datam habens parametrum; ſi (*eadem Fig.*) abſcindatur in A B latere trianguli per verticem Coni portio F A, quæ ſit quarta proportionalis ad B C^2, ad B A in A C (ſunt quidem BC, CA, A B latera trianguli dicti per verticem Coni) & ad H F datam parametrum; uti in Conicis; ita quoque deſcribetur in dato Cono Parabola Cubica primæ ſpeciei datæ parametri H F (*eadem Fig.*) Si ex A B la-

latere ejuſdem trianguli B A C abſcindatur AF cujus quadratum ſit quarta proportionalis ad BC^3, ad BA^2 in AC, & ad HF^2. Eſt enim in ea Parabola parameter data HF; ſi ea fiat proportio. Quare problema planum erit duarum dimenſionum; ſi tamen triangulum per verticem Coni non ſit æquilaterum. Et ita deſcribetur Parabola Cubica ſecunda datæ parametri HF; ſi ipſa eadem portio FA ſit quarta proportionalis ad BC^3, ad BA in AC^2 & ad HF. Et deſcribetur in dato Cono Parabola quadrato-quadratica prioris ſpeciei datæ parametri HF, ſi Cubus ipſius FA ſit quarta proportionalis ad BG^4, ad BA^2 in AC^2, & ad HF^3. Problema eſt ſolidum: ſi tamen triangulum per verticem non ſit æquilaterum. Invenietur autem hoc pacto. In triangulo maximo per verticem dati Coni (*eadem Fig.*) dicantur latera $BC = a$. $BA = b$. Et $CA = c$; dicatur verò parameter data p; & FA quæſita x. Erit ex conditione

$$x^3 = \frac{p^3\, bbcc}{a^4}.$$

Hæc æquatio continet duas medias proportionales inter b, & $\frac{p^3\, cc}{a^4}$. Nam reſolvitur in b. x. $\frac{xx}{b}$. $\frac{p^3\, cc}{a^4}$ continue proportionales. Hinc ſi inveniatur valor x primæ mediæ proportionalis duarum, noſcetur FA quæſita. Igitur ſint duæ lineæ FO, DQ ad angulos rectos in B; & in DQ ſit $BD = b$. Parametro BD, axi BO deſcribatur Parabola Apollo- Fig. 28.

niana BEN; accepta vero in FO portione BF $= \frac{p^3 cc}{a^4}$, deſcribatur alia Parabola Apollonii BNG parametro BF, axi vero BQ: & ſiquidem ea ſecat aliam Parabolam in N, problemate exiſtente poſſibili, ex puncto interſectionis N ordinentur NP, NM ad ſuas Parabolas; erit BM valor quæſitus. Nam eſt BM prima duarum mediarum proportionalum BM, & MN inter DB (b), & BF ($\frac{p^3 cc}{a^4}$): quare erit $= x =$ FA. Etenim eſt DB. PN (ſive BM) : : BM. BP (ſive MN): & BM. MN : : MN. BF. Ob Parabolas. Ergo fient $b.\ x.\ \frac{xx}{b}.\ \frac{p^3 cc}{a^4}$ continue proportionales. Et idcirco $x^3 = \frac{p^3 bbcc}{a^4}$. Hinc ſi abſcindatur in AB portio AF = BM, erit ea linea quæſita. Et ita de aliis Parabolis.

Fig. 27. De Ellipſibus eſt modo dicendum deſcriptis in dato Cono cum ſua parametro data EQ. [*Fig.* 25.] Fiat ſectio BAC trianguli per verticem Coni, ex A ducatur AK occurres cum BC producta in K. Et efficiatur ſectio Elliptica in Cono more conſueto; ita ut communis ſectio EP plani ſecantis cum dicto triangulo ſit parallela AK; occurrens lateri AB in ipſo Cono in puncto P. & ſint DG, MI ordinatæ baſis Coni, & ejus paralleli. Educatur ex E linea EQ normalis DG. Et ſiquidem Cubicus Circulus baſis Coni is ſit, ut $DG^3 = CG$ in GB^2; quare etiam in alio Circulo parallelo ſit $MI^3 =$ LI in IH^2; ſi fiat

ſi fiat $AK^3 . CK$ in $KB^2 :: PE^2 . EQ^2$; erit EQ parameter ſectionis Ellipticæ Cubicæ primæ ſpeciei. Oportet autem, ut planum ſecans, haud ſecus ac in Parabola, locetur ex parte G C, vel L I ad ſimplicem, vel minorem poteſtatem eductæ in dicto ſolido C G in GB^2, vel L I in IH^2. Demonſtratur. Agatur ex I linea I O parallela EQ ſecans junctam PQ in O: eſt PE^2 ad EQ^2 uti AK^3 ad CK in KB^2. Ergo PE^2 ad EQ^2 erit in ratione compoſita ex AK^2 ad BK^2, & ex AK ad CK. Atqui AK. CK :: EG. GC :: EI. IL. Et $AK^2 . BK^2 :: PG^2 . GB^2 :: PI^2 . IH^2$. Igitur $PE^2 . EQ^2$ in ratione compoſita erit ex EI ad IL, & ex PI^2 ad IH^2. Componantur hæ rationes; erit $PE^2 . EQ^2 ::$ EI in PI^2. IL in IH^2. Verùm $PE^2 . QE^2 :: PI^2 . IO^2 :: PI^2$ in IE. IO^2 in IE. Quare erit EI in PI^2. IL in $IH^2 :: PI^2$ in IE. IO^2 in IE. Idcircoque IL in $IH^2 = IO^2$ in IE. Unde, cum ſit per ſectionem circularem parallelam baſi, IL in $IH^2 = MI^3$. Erit quoque $MI^3 =$ IE in IO^2. Quæ eſt Ellipſis Cubica primæ ſpeciei, cujus eſt EQ parameter. Nam Cubus ordinatæ eſt æqualis ſolido, quod ex quadrato lateris recti in abſciſſam correſpondentem, minus ſolido ſimili, ſimiliterque poſito ei, quod ex eodem latere recto quadrato in latus tranverſum. Etenim IE in IO^2 deficit

deficit à ſolido ex IE in EQ^2, alio ſolido ſimili, ſimiliterque poſito illi, quod ex EQ^2 in EP; cum ſint circa eandem diagonalem PQ. Q.F.O.

Quòd ſi efficiatur AK^3. CK^2 in KB :: EP. EQ. [*eadem Fig.* 25.] erit, præſtitis omnibus uti ſupra, Ellipſis Cubica ſecundæ ſpeciei, cujus parameter EQ. Oportet autem, ut ſectio fiat ex parte CG, vel IL ad majorem poteſtatem ductæ in ſolido C G^2 in GB $= DG^3$; vel in ſolido LI^2 in IH $= MI^3$. Nam: EP. EQ erit in ratione compoſita AK ad KB, & AK^2 ad CK^2, ſive PG ad GB, vel PI ad IH; & AK^2 ad CK^2, vel EG^2 ad GC^2, ſeu EI^2 ad IL^2. Et compoſitis rationibus; erit EP. PQ :: PI in EI^2. IH in IL^2. Sed etiam PE. EQ^2 :: PI. IO :: PI in IE^2. IO in IE^2. Igitur PI in EI^2. IQ in IL^2 :: PI in IE^2. IO in IE^2, & idcirco IH in $IL^2 =$ IO in IE^2. Quare erit $MI^3 =$ IO in IE^2. Et erit Ellipſis Cubica ſecundæ ſpeciei in qua EQ parameter. Cubus enim ordinatæ eſt æqualis ſolido, quod ex quadrato abſciſſæ correſpondentis in latus rectum, minus ſolido ſimili, ſimiliterque poſito ei, quod ex eodem latere recto in quadratum lateris tranſverſi. Et ſi fiat, præſtitis omnibus, & deſcripto Cono, uti opus, pro Ellipſi quadrato - quadraticâ, AK^4. CK^3 in KB :: PE^2. EQ^2. vel AK^4. CK in

in $K\,B^3$ :: PE. EQ. Erit primo caſu deſcripta Ellipſis quadrato - quadratica primæ ſpeciei; ſecundo vero caſu deſcripta Ellipſis quadrato - quadraticâ alterius ſpeciei. Oportet autem, ſicuti in Parabolis, ut, cum parameter habet majorem poteſtatem, quám abſciſſa, ſectio locetur in Curvis hiſce ex parte, ex qua unum ſegmentum lineæ abſciſſarum baſis Coni, vel alterius Circuli paralleli habet minorem poteſtatem, quàm alterum ſegmentum, vel ſimplicem. Contra verò, cum parameter habet minorem poteſtatem, quàm abſciſſa, ſectio locata ſit oportet ea parte, ex qua dictum ſegmentum habet majorem poteſtatem, quàm alterum. Id enim colligitur ex dictis, & poſitis: & ita de ceteris Ellipſibus: & demonſtrationes faciles ſunt, ſimili modo inſtituendæ.

Hinc ſi Ellipſis Cubica prioris ſpeciei ſit in dato Cono deſcribenda datæ parametri EQ. Sint omnia, uti ſupra [*in Figura* 25.] Et ponatur factum eſſe quod quæritur. Verùm in AC abſciſſa ponatur portio AE æqualis notæ lineæ; atque ex E agatur EF parallela CB*K*. Tum dicantur AC $= a$. BC $= c$. parameter data $= p$. Sinus anguli *KAC*, quem ſinum pro ignota accipio, $= x$. Sinus rectus, ſeu radius $= d$. Sinus anguli in C $= b$. erit ſinus anguli in *K* $= 2d - b - x$. Cum nota ſit, ac data AE, cognitique anguli AEF, EAF ab triangulum per verticem BAC datum Coni dati, habebitur quoque ipſa EF nota, quæ dicatur g. Eſt *K*A, ad AC veluti ſinus ang. in C, ad ſinum anguli in *K*. Quare *K*A $= \frac{ab}{2d - b - x}$. Dicatur facilitatis, & brevitatis gratiâ, $2d - b = f$; erit *K*A $= \frac{ab}{f - x}$. Eſt etiam

A*K*.

AK. KC :: Sin. ang. in C. Sin. ang. KAC. Quare $KC = \frac{ax}{f-x}$. & $BK = KC - BC = \frac{ex-fc}{f-x}$, dicta quantitate $a+c=e$. Item eſt quoque AK. KB :: PE. EF. Igitur $PE = \frac{abg}{ex-fc}$. Modo, ob parametrum, eſt ex dictis: $\frac{ab^3}{\overline{f-x}^3} . \frac{ax}{f-x}$ in $\frac{\overline{ex-fc}^2}{\overline{f-x}^2}$ :: $\frac{\overline{abg}^2}{\overline{ex-fc}^2} . p^2$. quod eſt; $\frac{a^3b^3p^2}{\overline{f-x}^3} = \frac{a^3b^2g^2x}{\overline{f-x}^3}$.

Quare tandem fiet $x = \frac{bp^2}{g^2}$. Accipiatur hic valor pro ſinu anguli KAC, ſubſtituta jam loci f, ipſâ $2d-b$; & loco e, ipſâ $a+c$; & in AC ex puncto A ducatur AK in angulo, cujus ille ſit ſinus, quæ AK occurret BC in K. Tum, abſciſsâ AE æquali dictæ datæ lineæ, ex E agatur planum ſecans, ita ut communis ſectio EGP cum triangulo per axem Coni ſit parallela AK; occurret ea cum latere AB ejuſdem trianguli neceſſario in Cono in aliquo puncto P. Et fiet Sectio Elliptica Cubica prioris ſpeciei, cujus data parameter EQ. Q. F. O. Si efficienda ſit Ellipſis Cubica alterius ſpeciei, effectis omnibus, quæ antea, & iiſdem poſitis, erit $\frac{a^3b^3}{\overline{f-x}^3} : \frac{a^2x^2}{\overline{f-x}^2}$ in $\frac{ex-fc}{f-x}$ :: $\frac{abg}{ex-fc} . p$. Quare $xx = \frac{b^2p}{g}$. Et ita de reliquis Ellipſibus eſt dicendum.

Po-

Digitized by Google

Fig. 29.

Poſtremo loco ſit deſcribenda in Cono hyperbola Cubica prima cum ſuo latere recto EH. Sit facta ſectio triangularis per verticem ABC. Sit baſis Coni cubicus Circulus BDC; & DG ordinata; ac $DG^3 = CG$ in GB^2. Circulus parallelus in Cono ſit QML; & MI ejus ordinata; ac $MI^3 =$ LI in IQ^2. Fiat ſectio hyperbolica in Cono more conſueto. Quare EG linea abſciſſarum ſectionis, & communis ſectio plani ſecantis cum dicto triangulo occurrat lateri trianguli extra Conum in P. Ex A ducta ſit A K æquidiſtans E G ſecans B G in K. Sit EH recta linea educta ex E normalis; & juncta ſit P H. Igitur efficiatur $AK^3 . CK$ in $KB^2 :: PE^2 . EH^2$. Ita tamen ut ſectio ſit ex parte CG, vel LI ad minorem poteſtatem eductæ, vel ad ſimplicem, quàm alterum ſegmentum in ſolido CG in $GB^2 = DG^3$; vel in ſolido I L in $IQ^2 = MI^3$: & erit deſcriptæ in Cono hyperbolæ parameter EH. Demonſtratur eodem modo, ac factum eſt in Ellipſi; ducta ex I linea IO parallela EH, occurrente PA in O. Quòd ſi fiat, iiſdem poſitis, $AK^3 . CK^2$ in $KB :: EP . EH$. & omnia præſtentur, uti opus; hyperboles erit Cubica ſecundæ ſpeciei cum ſua parametro E H deſcripta in Cono. Oportet autem, ut ſectio fiat ex parte CG, vel IL ad majorem poteſtatem eductæ in ſolido CG^2 in $GB = DG^3$; vel in ſolido LI^2 in $IQ = MI^3$. Et ſi fiat [deſcripto Cono pro hyperbolis quadrato-quadraticis, reliquiſque confectis, uti opus]

$AK^4 . CK^3$ in KB :: $PE^2 . EH^2$: vel $AK^4 . CK$ in KB^3 :: $PE . EH$. Erit primo caſu deſcripta hyperboles quadrato - quadratica primæ ſpeciei, ſecundo verò deſcripta hyperboles quadrato - quadratica ſecundæ ſpeciei. Semper autem oportet, ſicuti in aliis duabus Curvis; ut, cum parameter habet majorem poteſtatem, quàm abſciſſa, ſectio locetur in hiſce Curvis ex parte, ex qua unum ſegmentum lineæ abſciſſarum baſis Coni, vel alterius Circuli paralleli habet minorem poteſtatem, quàm alterum ſegmentum, vel ſimplicem. Contra verò; cum parameter habet minorem poteſtatem, quàm abſciſſa, ſectio locata ſit oportet ex parte, ex qua dictum ſegmentum habet majorem poteſtatem, quàm alterum. Id enim colligitur ex dictis, & poſitis: & ita de ceteris Curvis hyperbolicis eſt efficiendum: & demonſtrationes faciles ſunt, ſimili modo inſtituendæ.

Manifeſtum verò eſt ex dictis quid ſit faciendum, ſi deſcribendæ ſint hyperbolæ in Cono dato datæ parametri. Nam, haud ſecus ac effectum eſt in Ellipſi, poſitis omnibus, & manentibus, uti ſupra in Cono (*eadem Fig. 29.*) atque ipsâ eadem argumentatione inſtituta, ac in Ellipſi, iiſdemque ſymbolis, ſeu litteris pro indiciis quantitatum retentis, ductâ quoque ex puncto E lineâ EF parallela CB; ſola differentia erit, quòd fiet in hyperbolis $KB = BC - KC$; ubi in Ellipſi (*Fig. 25.*) erat $KB = CK - BC$.

Quare erit in hyperbolis $KB = c - \frac{ax}{f - x} = \frac{fc - cx - ax}{f - x}$; ſive (accepta $cx + ax = ex$) $= fc - ex$. Et reliqua patent: & fiet $x = \frac{bp^2}{g^2}$. Et noſcitur quoque

quid

quid ſit præſtandum in problemate pro aliis hyperbolis in dato Cono datæ parametri deſcribendis.

Me non monente, jam noſcitur; ſive etiam adoleſcentes animadverterent vellem, cum ſinus ang. ponitur, aut prodit æqualis quantitati continuæ, ſenſum eſſe, de quantitate relata ad numerum, non ad extenſionem; ſeu ſinus angulorum eſſe æquales quantitatibus continuis relative, & ſecundum proportionem, non abſolute, & ſecundum quantitatem abſolutã.

Ita: ſi x [ſin. ang.] $= \frac{bp^2}{g^2}$; & bp^2 ſit major quàm g^2; ſenſus eſt, tot vicibus x continere unitatem, ſeu ad illam rationem habere, quot vicibus pb^2 continet quantitatem g^2; ſive quanta eſt ratio $\frac{bp^2}{g^2}$. Si verò g^2 major ſit quàm bp^2; ſenſus eſt, tot vicibus unitatem relationem habere ad x, quot vicibus habet g^2 ad pb^2 proportionem. Nam ſi eſt $\frac{bp^2}{g^2} = x$; erit etiam $\frac{1}{x} = \frac{g^2}{bp^2}$. Numerus ſpectatur Cubitorum, pedum .... quot eſt quantitas; non ejus extenſio. Ita cum dicitur d ſinus rectus, ſeu radius; ſenſus eſt, acceptum ſinum rectum fuiſſe in tot cognitas numero diviſum partes, quot d indicare affirmatur. Id ſemel commonitum ſufficiat.

Expoſitis quæſtionibus de deſcriptione ſectionum Conicarum in ſolido Cono adfinia ſunt nonnulla pro-

blemata tractari ſolita ad ejuſmodi deſcriptiones ſpectantia; quæ neceſſe eſt in noſtris quoque ſectionibus Conicis contemplari. Data poſitione linea recta FD terminata ad F; & data parametro H, Parabolam primam in plano deſcribere ſubjecto dato, per ſolidum Conicum, quæ habeat FD diametrum, F verticem, parametrum H; & ordinatas ad angulum datum; qui primò ſit rectus. Dictum eſt, ſectionem in plano deſcribendam eſſe *per ſolidum Conicum*. Nam hujuſmodi quæſtiones & per modos Mechanicos alius generis, non in ſolido Cono effectos, & facillime per Geometricas deſcriptiones confici bene etiam poſſunt.

Fig. 30

Ponatur jam factum eſſe, quod quæritur. Sit BAC triangulum per axem Coni: BC baſis: GE communis ſectio hujus plani ſubjecti generantis jam ſectionem quæſitam, cum baſi Coni. Profecto GE normalis eſſe debet ad BC (*VII. Lib. 1. Conicor.*) Sed ſunt ordinatæ parallelæ ipſi GE. Ergo angulus GDF rectus. Quare planum datum, & baſis Coni duo plana ſint oportet recta ad planum trianguli per axem (*19. 11. Elementor.*) Eſt enim FD etiam in plano, ſeu triangulo per axem BAC. Et tria ſunt hæc plana diverſa, atque ita mente ſunt intelligenda. Sed et Conus rectus etiam ſit oportet (*VII. Lib. 1. Conicor.*)

His poſitis: ponatur ſumpta in latere AB portio FA data, determinataque pro lubitû, $= a$. Et ſit ſinus anguli ABC trianguli per axem, ignota x. Sinus rectus ſit $= d$. parameter H $= p$. Erit triangulum BAC per axem iſoſceles. Quare erit ſinus anguli in $A = 2d - 2x$. Eſt autem, ob parametrum, BC^2. BA in AC :: p. a. Sive $BC^2 . BA^2 :: p . a$. Sed $BC^2 . BA^2 :: \overline{2d - 2x}^2 . xx$. Igitur fiet poſt

mul-

multiplicationem mediorum, & extremorum, poſtque efformationem æquationis ; $xx - \frac{8adx + 4add}{4a - p} = o$. Quæ facillimæ eſt conſtructionis æquatio. Componetur autem ſic. Inventâ x, invenietur quantitas ſinus anguli ABC. Quare, quia FD debet eſſe parallela A C ; idcircoque & triangulum B F D æquicrure, invenietur quoque, inventâ x, ſinus anguli B F D in triangulo B F D. Modo ex F in angulo hujus ſinûs agatur F B, in qua ſit FA $=$ a. Ex puncto A agatur AC parallela FD. Et ſit quævis A C accepta : ex C agatur in angulo eodem inventi ſinus x linea C B D ſecans F D in D, & FA in B. Triangulo conſtituto BAC normali ad datum ſubjectum planum normalis quoque ſit Circulus BGC. Et generetur Conus. Et ſit GDE perpendicularis ad BC. Et fiat ſectio per F D, ita ut communis ſectio plani ſecantis cum BC ſit GDE. Et ſectio Parabolica efformabitur quæſita, cujus F D axis, F vertex, parameter H. Et in ſubjecto plano; per Conum erit deſcripta Q. F. O.

Igitur æquatio generalis pro omnibus Parabolis infinitis erit ; $p^m . a^m :: \overline{2d - 2x}^{m+n} . x^m\, x^n$. Sit $m = 1$. $n = 1$. Erit ſolutum problema in Parabola quadratica. Sit $m = 2$. $n = 1$. Erit ſolutum in Cubica prima. Si $m = 1$. & $n = 2$. Erit confectum in parabola Cubica alterius ſpeciei. Si $m = 3$. $n = 1$. Erit inventum in Parabola quadrato - quadratica prima. Si $m = 1$. $n = 3$. Erit confectum in Parabola quadrato - quadratica ſecundæ ſpeciei. Et ita deinceps.

Sed non ſit angulus rectus. Hic caſus eſt pro ſola Parabola quadratica in deſcriptione per ſolidum Co-

Conicum confecta. Ponatur jam factum eſſe, quod quæritur; ſitque DG diameter data poſitione terminata ad D; & D vertex ejus. Nunc POQ ſit ordinata ad hanc diametrum biſecta in O; ita ut angulus POD ſit angulus datus, non rectus; & producatur utrimque DG ad F. Profecto ſi ex D tangens in D ducta ſit ſectionis, ſeu parallela POQ; erit ang. FDC dato æqualis. Suppoſita modo ſit axis ſectionis linea CLM; parallela idcirco ipſi DG, & ſit vertex L; atque ex L parallela ordinatis ſuppoſita ſit LEF ſecans DC in E, & DG in F. Et tangens ſecet CLM in C; atque ordinetur ex D ad axim linea DM. His poſitis.

Fig. 31.

Sinus anguli MDC notus (eſt enim angulus in M rectus, & ang. in C = angul. FDC dato) ſit $= a$. Sinus anguli recti dicatur d. Et ſinus dati ang. DCM $= b$. Sit verò DM ignota x. Data autem parameter ſit p. erit $CM = \frac{ax}{b}$: & hinc, $ML = \frac{ax}{2b}$; atque $CD = \frac{dx}{b}$; quare $ED = \frac{dx}{2b}$. Verùm eſt ob parametrum, $\frac{dx}{2b} \cdot \frac{ax}{2b} :: p \cdot \frac{2dx}{b}$; igitur x [$=$ DM] $= \frac{apb}{2dd}$. Componetur autem ſic. Cum eſſe debeat $DM^2 =$ ML in parametrum axis; erit hæc parameter $= \frac{bbp}{dd}$; ſi ſubſtituatur loco x inventus ejus valor. Eiet vero ipſa $ML = \frac{aap}{4dd}$. Ergo parametro $\frac{bbp}{dd}$, & lineâ LM terminatâ ad L, poſitâque in inventa diſtantia DM abs DG [quæ data po-

poſitione] & ductâ ipſi DG parallela, vertice verò L, deſcribatur in Cono ſectio Parabola Apolloniana in angulo recto, uti antea oſtenſum: & accipiatur quoque L A datum ſegmentum lateris trianguli per axem. Hæc Parabola erit illa, quam modo ſuppoſuimus, ob diſtantiam DM, & ob $DM^2 = ML$ in parametrum inventam: quare eam ipſam habebit poſitionem, & naturam. Et axis erit eadem LM, & idem vertex L. Tranſibit vero per D, eadem ratione, quia $DM^2 = ML$ in parametrum; vel etiam quia habet tangentem CD in D. Et ejus diameter erit DG poſitione data: &, ob angulum FDC diametri hujus cum tangente æqualem dato, habebit ordinatim poſitas in angulo æquali eidem dato: & vertex erit D; & parameter erit data P; & in dato plano per deſcriptionem Conicam erit deſcripta. Q. F. C.

Pro Ellipſi. Sit data poſitione, & magnitudine linea ED terminata ad E; & oporteat Ellipſim in plano ſubjecto dato deſcribere, cujus diameter, ſeu latus tranſverſum ED, latus rectum data etiam EP, & angulus ordinatarum rectus. Supponatur jam factum eſſe, quod quæritur. Et uti ſupra in Parabola oſtenſum; Conus erit rectus, quare BAC triangulum per axem iſoſceles. Item FHG communis ſectio plani ſubjecti cum BLC baſi Coni, erit, uti ſupra in Parabola, normalis ad planum, quod per BAC triangulum per axem: & parameter ſit p. Fig. 32.

Supra ED conſtituatur triangulum datum ſpecie, & magnitudine EAD. Eſt jam AK parallela ED, & occurrens BC diametro baſis Coni in K. Secet vero ED eandem BC in H. Eſt quidem GHF, uti diximus, normalis ad BC. Dato triangulo EAD ſpecie, & magnitudine, & triangulo BAC.

BAC iſoſcele exiſtente, datus eſt ſinus anguli ABK; qui dicatur $= g$; & datus ſinus ang. AKB, qui dicatur $= n$: ſed ſinus ang. BAK etiam datus, ſit $= m$. Nunc dicantur $AD = b$. $AE = a$. $ED = c$. Sinus ang. EDA datus etiam, dicatur $= f$. Et ſinus anguli ACK item notus, dicatur $= e$. Sit vero AC [$=$ AB] ignota x. Erit $BK = \frac{mx}{n}$. $AK = \frac{gx}{n}$. Sed et AB. AK : : EB. EH. Et eſt $AE = x - a$. Quare erit $EH = \frac{gx - ga}{n}$. Et $DH = EH - ED$, erit $= \frac{gx - ga - cn}{n}$. Ponatur, brevitatis, & facilitatis gratiâ, $ga + cn = d^2$. Item eſt CH. HD :: ſinus ang. CDH. Sin. ang. DCH. Igitur erit $CH = \frac{gfx - fd^2}{en}$. Denique CA. CD :: CK. CH. Hinc habebitur $CK = \frac{gfxx - d^2fx}{enx - enb}$. Modo, ob parametrum Ellipſis, eſt $\frac{g^2x^2}{nn}$. $\frac{mx}{n}$ in $\frac{gfxx - d^2fx}{enx - enb}$: : c. p. Quare erit; $\frac{pg^2x^2}{nn} = \frac{cmgfx^3 - cmd^2fxx}{ennx - ennb}$. Et tandem, conſtituta æquatione, fiet $x - \frac{ceg^2b + md^2fc}{peg^2 - mgfp} = o$: ſive, poſita loco d^2 quantitate $ga + cn$, cui

d^2

d^2 ſubſtitutum fuit; erit $x - \frac{ceg^2b + cgamf + c^2nmf}{peg^2 - mgfp} = o.$

Et facile valor x invenietur.

Componetur autem ſic: invento valore x; accipiatur in A D ipſa A C $= x$. Ex A agatur AK parallela E D. Productâ A E, fiat A B = B C. Jungatur B C; quæ producta occurrat A K in K. Et E D ſecet jam B C in H. Et fiat ſectio per E D more conſueto ſectionum Ellipticarum, præſtitis quidem omnibus, uti ſupra in Parabola pro hoc problemate in ejus compoſitione. Et fiet ſectio Elliptica quæſita: & cetera patent. Q. F. O. Erit vero æquatio generalis pro omnibus Ellipſibus; ſive pro problemate conficiendo in omnibus Ellipſibus;

$$\frac{\overline{g}\, x^{m+n}}{n^{m+n}} \cdot \frac{\overline{m}\, x^{m}}{n^{m}} \text{ in } \frac{\overline{gfxx - d^2 fx^n}}{\overline{enx - enb^n}} :: c^m \cdot p^m.$$

Sit $m = 1$. $n = 1$. Erit ſolutum problema in Ellipſi quadratica. Sit $m = 2$. $n = 1$. Erit ſolutum in Ellipſi Cubica prima. Si $m = 1$. $n = 2$. Erit confectum in Ellipſi Cubica alterius ſpeciei. Si $m = 3$. $n = 1$. Erit inventum in Ellipſi quadrato-quadratica prima. Si $m = 1$. $n = 3$. Erit confectum in Ellipſi quadrato-quadratica ſecundæ ſpeciei. Et ita deinceps.

Sit modo angulus datus non rectus. Et hic caſus eſt ſolius Ellipſis quadraticæ. Supponatur jam factum, quod quæritur. Sit MQ data diameter, & MF parameter; quæ inſiſtat ad angulum quemvis ad MQ. Ponatur DE axis ſectionis quæſitæ, & ex M ducta tangens MP occurrens DE in P. Sit MN ordinata ad axim. Sit O centrum: ex D ſit excitata DL parallela ordinatæ MN, ſecans PM in I; & MQ Fig. 33.

K pro-

productam in H. Nunc ſint $MQ = a$. Sin. ang. PMQ notus, $= g$. Sinus anguli recti $= d$. $MN = x$. Erit ſinus anguli $MOP = \frac{2dx}{a}$. Quare ſinus anguli $MPO = 2d - g - \frac{2dx}{a}$. Sive, effecta $2d - g = b$; erit $= \frac{ba - 2dx}{a}$. Eſt vero MO. OP : : Sin. ang. in P. Sin. ang. PMQ. Quare $OP = \frac{aag}{2ba - 4dx}$. Nunc ſin. ang. $PMN = \frac{2da - da - ba + 2dx}{a} = \frac{da - ba + 2dx}{a}$. Quare ſinus ang. $NMO = \frac{ga - da + ba - 2dx}{a} = g - d + 2d - g - \frac{2dx}{a} = \frac{ad - 2dx}{a}$. Ergo, quia MO. ON : : Sin. ang. recti. Sin. ang. NMO; erit $ON = \frac{ad - 2dx}{2d} = \frac{a - 2x}{2}$. Verùm eſt PO. OD : : OD. ON. Quare $OD^2 = \frac{aag}{2ba - 4dx}$ in $\frac{a - 2x}{2} = \frac{aag}{ba - 2dx}$ in $a - 2x$.

In triangulo IMH, ang. IMH eſt ang. datus (hypoth.) cujus ſinus dicatur b. Anguli vero IHM æqualis NMO ſinus eſt quidem $\frac{ad - 2dx}{a}$. Eſt autem MP. MN : : Sin. ang. recti ad ſinum ang. in P.

Qua-

Quare erit $MP = \frac{adx}{ba-dx}$. Modo ob parametrum MF, quæ data dicatur p; habetur MF. 2 MP :: MI. IH : : Sin. ang. in H. Sin. ang. IMH. Quare erit $p. \frac{2adx}{ba-2dx} :: \frac{ad-2dx}{a}. b$. Sive $xx - \frac{ax}{2} - \frac{pbx}{2d} + \frac{pbba}{4dd} = o$. Componetur autem ſic. Invento valore x [MN] determinabitur axis DE per effectam analyſim. Determinabitur, noſceturque quoque ON; quare & noſcetur valor DN; atque NE. Hinc determinata fiet parameter ipſius axis DE; quæ parameter eſt quarta proportionalis ad DN in NE, ad MN^2, & ad DE. Modo axi, ſeu latere tranſverſo DE, ordinatis in angreſſo, vertice D, poſitione verò DE in diſtantia MN à dato puncto M, & angulum efficiente MND rectum, deſcribatur in Cono Ellipſis, uti antea oſtenſum. Pertranſibit ea per M ob $MN^2 = \frac{\text{parametro in DN, \& NE ductæ}}{DE}$; ſive ob tangentem PM. Pertranſibit quoque per Q ob MO = OQ; & O centrum. Atque habebit MQ diametrum, & ordinatas in angulo dato, & datam MF parametrum hujus diametri; & in plano dato ſubjecto per Conum erit deſcripta. Q. F. O.

Sit poſtremo loco deſcribenda in Cono hyperboles EF, cujus latus tranſverſum datum DE, parameter EP data; & angulus ordinatarum rectus. Supponatur jam factum eſſe quod quæritur: ſint omnia uti ſupra in Ellipſi, & Parabola, quod ad Conum ſpectat. Fig. 34.

ſpectat. Modo ſupra ED conſtituatur eodem modo, ac in Ellipſi, triangulum EDA magnitudine, & ſpecie datum. Et ſecet EH in H latus BC trianguli ABC per axem Coni. Sit ducta ex A vertice hujus trianguli parallela AK ipſi DE, ſecans BC in K, & dicantur $AE = a$; $AD = b$. $DE = c$. Et ſinus angulorum reſpondentium angulis, qui in Ellipſi, ſunt etiam dati, uti in Ellipſi; & dicantur eodem modo, quo in Ellipſi: & ED latus tranſverſum datum dicatur b; & latus rectum datum dicatur p; & omnia uti in Ellipſi: & erit $CK = BC - KB = \frac{d^2fx - gfxx}{exn - enb}$. Et cetera patent uti in Ellipſi; & eadem æquatio fiet; eademque compoſitio. Et æquatio quoque generalis eodem modo conſtituetur pro omnibus hyperbolis Q. F. O.

Fig 35. Si vero angulus non ſit rectus; fiant omnia plane uti in Ellipſi: & confectum erit problema: & hic caſus eſt ſolius hyperbolæ quadraticæ.

Advertendum eſt, quòd in ſupra pertractato problemate de deſcribendis Parabolis quibusvis datæ parametri in Cono dato (*pag.* 18. & 19.) nil immutatur natura problematis in Parabola data tùm generis, quùm ſpeciei, ſi quo libet magis modo Solidum, quod eſt in ſecundo termino proportionis, componatur. Ita idem eſt, ſi (vide quæ ibi) pro Parabola Cubica prima ſit quadratum AF quarta proportionalis ad BC^3, ad BA in AC^2, & ad HF^2; vel ſi ſit quarta proportionalis ad FC^3, ad BA^2 in AC, & ad HF^2. Itemque Pro Parabola Cubica ſecunda idem erit, ſi vel ſit AF quarta proportionalis eodem modo ad BC^3, ad BA in AC^2,

& ad

Digitized by Google

& ad HF ; vel ſit quarta proportionalis ad BC^3, ad BA^2 in AC, & ad HF. Sed & idem etiam erit pro Parabola quadrato - quadratica prima, ſi Cubus ex AF fiat vel quarta proportionalis ad BC^4, ad BA in AC^3, & ad HF; vel quarta proportionalis ad BC^4, ad BA^3 in AC, & ad HF: & etiam ſi quarta ſit proportionalis ad BC^4, ad BA^2 in AC^2, & ad HF. Idemque de reliquis Parabolis; modo tamen ſemper ſit non ſolum idem genus, ſed etiam eadem ſpecies Curvæ; eſt dicendum. Idcircoque nos ibidem modo unum Solidum, modo alterum in ſecundo illo termino collocavimus.

Sed diverſa ratione res ſe habet in Ellipſibus, & conſequenter in hyperbolis, dum de eodem agitur problemate. Nam ſi conſtitutio illa ſolidi in ſecundo termino poſiti immutetur, non immutabitur profectò Curvæ natura; ſed poterit aliquando natura immutari problematis, uti calculo invenivimus. Et quidem pro Ellipſi Cubica prioris ſpeciei deſcribenda in dato Cono cum data parametro, problema ſupra fuit [*pag.* 63. & 64.] ſimplicis dimenſionis; & Solidum illud (vide quæ ibi) in ſecundo termino locatum erat KC in BK^2. Sed ſint omnia uti ibidem, & immutetur Solidum, ac fiat KC^2 in BK; problema erit duarum dimenſionum: Nam, præſtitis omnibus, quæ ibi oſtenſa ſunt; verùm in ſecundo termino proportionis locato Solido KC^2 in BK; erit $x^2\ b^2\ g^2\ a^4 = a^3\ b^3\ p^2 ex - a^3\ b^3\ p^2 fc$. Sive, ſubſtituta loco e, ipſa

quan-

quantitate $a+c$; & loco f, ipſa $2d-b$; fiet $xx = \frac{b\,p^2 x}{g^2} + \frac{bp^2cx}{ag^2} - \frac{2bp^2dc+b^2p^2c}{ag^2}$. Sed idem problema pro Parabola Cubica ſecunda poſitum ibi habuit Solidum dictum hocce KC^2 in BK. Et problema fuit duarum dimenſionum. Immutetur Solidum, & fiat KC in BK^2 & problema quoque erit duarum dimenſionum. Nam fiet $a^3 \; b^3 \; p = a^2 \, cbgxx - fca^2bgx$. Et ſubſtituantur loco e ipſa $a+c$, atque loco f ipſa $2d-b$. Et cetera patent.

Fig. 36. Immo primus caſus problematis, nimirum pro Parabola Cubica prima, cum poſsit alio modo confici, id ipſum etiam manifeſto demonſtrat. Quandoquidem loco acceptæ ignotæ ſinis anguli KAC x; quod ibi (eodem loco) effectum fuit; accipiatur pro ignota x linea AK. Et ſint ſin. ang. recti d; & $AC = a$. $BC = c$. Sin. ang. in $C = b$. Et $EF = g$. Sit verò data parameter p. Atque inſtituatur analyſis Algebrica per ſinus, & latera in triangulo KAC, ubi notus ſinus ang. in C; notum latus AC; eſt vero denominatum latus AK. Et invenietur valor x, obtenta æquatione. Unde, quia tùm noſcetur ſinus ang. KAC; in eo angulo ducenda eſt AK ſecans in K lineam BC baſis; atque parallele AK ſectio per E eſt efficienda. Et erit (dicta $2d-b=e$) $KC = \frac{ex-ab}{b}$. Et KB [facta $ab+bc=f^2$] $= \frac{ex-f^2}{b}$. Et $PE = \frac{bgx}{ex-f^2}$. Quare ſi fiat Solidum dictum, uti ibi compoſitum fuit, KC in KB^2 ; æquatio tandem erit; $x = \frac{ag^2\,b}{ag^2-bp^2}$;

ſimplicis omnino dimenſionis eodem prorſus modo, veluti ibi fuit inventa, juxta aliam ſolutionem, in qua tamen Solidum eodem modo conſtituebatur. Si vero dictum Solidum immutetur, fiatque KC^2 in BK; æquatio tandem prodibit duarum dimenſionum

$$x^3 = \frac{\overline{ex-b}^2\, a \text{ in } \overline{b^2 \quad g^2 \quad x^2}}{b^3 \; p^2 \; ex - b^3 \; p^2 \; f^2};$$

eodem prorſus pacto, veluti hic ſupra modo juxta aliam ſolutionem, æquatio fuit duarum dimenſionum; in qua Solidum illud eadem ratione erat compoſitum. Ergo varii ſunt caſus problematis pro Ellipſibus, & idcirco pro hyperbolis, ſingillatim pertentandi.

Manifeſtum eſt etiam, deſcriptiones noſtrarum Curvarum infinitè productarum nuper ſupra in Cono præbitas cum ſua parametro, de quibus agere cœpimus à pag. 55. nil immutari, & eaſdem manere, ſive hoc idem ſolidum, de quo modo diximus, in ſecundo termino poſitum uno modo ſit conſtitutum, ſive ſit alio, in una, eademque ſpecie, non modo genere, Curvæ: ſola cautio conditionis ibi adpoſitæ adhibenda eſt de collocatione, ſeu ſitu plani ſecantis Curvam generaturi.

Hæc omnia ſpectant ad deſcriptiones Conicarum Sectionum infinitè productarum per Conos varii generis efformatas; quæ quidem organica deſcriptio eſt juxta ea, quæ dicta ſunt initio capitis quarti. Nunc modus eſt ſubnectendus, quo ex Geometricâ deſcriptione in plano poſſint delineari: & a Parabolis quidem exordiemur. Sit AB linea accepta pro diametro omnium Parabolarum (communem enim deſciptionem præbemus omnibus parabolis, eadem operandi ratione, & uno eodemque ordine) ac ſit AC

latus

latus rectum ad quemlibet angulum cum AB, ſive ad angulum, qui magis optatur ab ordinatis fieri ſupra diametrum. Sumatur in AB abſciſſa AM; atque inter parametrum, ſive latus rectum, & abſciſſam AM inveniantur tot mediæ proportionales, quot indicat genus parabolarum, quæ deſcribi debent; nimirum, una, ſi Parabola ſit primi generis; duæ ſi ſint Parabolæ ſecundæ generis; tres ſi ſint Parabolæ tertii generis; atque ita deinceps: tum adplicentur omnes hæ mediæ proportionales ordine ipſi abſciſſæ AM; quæque ſint parallelæ AC. Et harum proportionalium extremitates præſtabunt puncta, quæ in ſingulis erunt ſpeciebus illius generis Parabolæ: modo etiam eæ comprehendantur ſpecies, quæ radicum extractione ad alias inferioris generis deprimuntur. Ita enim unumquodque genus tot ſpecies plane continebit, quot mediæ ſunt proportionales.

Fig. 37

Si Parabola primi generis ſit deſcribenda inveniatur inter AC, & AM una media proportionalis; quæ ſit MN; erit N in Parabola quæſita. Continueturque inventio puncti N eadem ratione. Quoniam ſit $AC = a$. $AM = x$. $MN = y$. Erit jam $yy = ax$. Quæ illa eſt Parabola. Si Parabola ſecundi generis: Inveniantur inter AM, & MN duæ mediæ proportionales; quod ſi MN ſit prima earum erit N in Cubica Parabola prioris ſpeciei; Si vero ſit ſecunda ex duabus mediis proportionalibus; erit punctum N in Cubica ſecundæ ſpeciei. Quoniam, retenta eadem denominatione, erunt primo caſu continuè proportionales $a \,.\, y \,.\, \frac{y^2}{a} \,.\, x$. Unde $y^3 = aax$. Quæ prima eſt Cubica. Secundo caſu fient continue proportionales $a \,.\, \frac{y^2}{x} \,.\, y \,.\, x$. Unde erit $y^3 = axx$. Quæ eſt ſecunda Parabola Cubica.

Ea-

Digitized by Google

Eadem ratione ſi Parabolæ deſcribendæ ſint tertii generis, inveniendæ ſunt tres mediæ proportionales inter A C, & A M. Et ſi M N ſit prima harum trium, erit punctum N in quadrado — quadratica prima; nam tum erunt in continua proportione quantitates, $a \,.\, y \,.\, \frac{y^2}{a} \,.\, \frac{y^3}{aa} \,.\, x$. Unde $y^4 = a^3 x$. Quæ eſt prima quadrato — quadratica. Si verò ipſa M N fuerit ſecunda trium mediarum proportionalium; erit punctum N in ea Parabola tertii generis, quæ per extractionem radicis deprimitur ad Apollonianam. Etenim, ob proprietatem progreſſionis Geometricæ bene Geometris notam, quia extremæ A C, A M eo caſu æqualiter diſtant ab ipſa M N, erit tum uti a ad y, ita y ad x; idcircoque $y^2 = ax$. Denique ſi eadem M N fuerit tertia trium mediarum proportionalium; quia tum habetur continua proportio $a \,.\, \frac{y^3}{xx} \,.\, \frac{y^2}{x} \,.\, y \,.\, x$; prodibit $y^4 = ax^3$, Parabolæ quadrato — quadraticæ alterius ſpeciei æquatio.

Sint nunc deſcribendæ infinitæ Ellipſes. Sit A B latus ipſarum tranſverſum, & A C latus rectum ſupra A B ad angulum exoptatum abſciſſarum. Modo jungatur B C; & accepta in A B abſciſsâ quavis AM, ducatur ex M recta MO parallela AC, atque occurrens in O rectæ BC. Dein inter MO, & abſciſſam A M inveniantur tot mediæ proportionales, quot indicat Ellipſis deſcribenda. Ac tum, haud ſecus ac in Paraboſis, adplicentur omnes hæ mediæ proportionales ordine ipſi abſciſſæ A M. Profecto Fig. 38.

 extre-

extremitates earum dabunt puncta, quæ erunt in ſingulis ſpeciebus ejus generis; cum hic etiam ſpecies eæ comprehendantur, quæ extractione radicum ad alias inferioris generis deprimuntur.

Nam, poſito latere recto AC $= a$; latere tranſverſo AB $= b$; & abſciſsâ AM dicta x; ordinatâ verô MN dicta y; erit reliqua portio BM $= b - x$. Unde, cum invenienda ſit una media proportionalis juxta hanc methodum inter MO, & AM, & ſit ea ipſa MN; & cum propter ſimilia triang. BMO, BAC ſit MO $= a - \frac{ax}{b}$; erit profecto $a - \frac{ax}{b} . y :: y . x$. Quare $y^2 = ax - \frac{axx}{b}$. Quæ eſt primæ Ellipſis æquatio. Si vero deſcribendæ ſint Ellipſes ſecundi generis, inveniantur inter MO, & MN duæ mediæ proportionales. Si MN fuerit earum prima, erit punctum N in Ellipſi Cubica prioris ſpeciei; nam tum proportionales erunt quantitates quatuor, $a - \frac{ax}{b} . y . \frac{yy}{a - \frac{ax}{b}} . x$. Et idcirco erit $y^3 = aax - \frac{2aaxx}{b} + \frac{aax^3}{bb}$. Quæ eſt æquatio illius Ellipſis. Si vero MN ſit ſecunda ex duabus mediis proportionalibus, idem punctum N in erit in Ellipſi Cubica alterius ſpeciei; nam eo caſu erunt continuè proportionales $a - \frac{ax}{b} . \frac{yy}{x} . y . x$. Unde æquatio promanat ad Ellipſim Cubicam alterius ſpeciei $y^3 = axx - \frac{ax^3}{b}$. Hæ vero Ellipſes migrabunt in Cir-

culos.

Digitized by Google

culos infinitos, ſi angulo BAC recto, ponatur latus rectum AC æquale tranſverſo AB. Nam tum erit $MO = BM$; & rectæ proportionales mediæ inter MO, & AM eædem erunt, quæ mediæ proportionales inter portiones BM, & AM. Et punctum N erit in Circulo primi generis, ſi uti in Ellipſi, perpendicularis MN ſit media inter portiones BM, AM: etenim, dictis $AB = a$. $AM = x$. $MN = y$; erit $BM = a-x$. Hinc $a-x . y :: y . x$. Et $y^2 = ax-xx$. Qui primus eſt Circulus. Quod ſi normalis MN prima ſit ex duabus mediis dictis inter BM, AM; erit N in Circulo Cubico prioris ſpeciei. Quod ſi fuerit ſecunda, erit in Cubico Circulo ſecundæ ſpeciei. Et ita de reliquis Circulis.

Proponantur denique deſcribendæ infinitæ Hyperbolæ. Sit AB latus tranſverſum; & AC rectum, ſeu parameter ſupra AB in angulo optato ordinatarum ſupra abſciſſas. Jungatur BC. Et in AB producta verſus A accipiatur quævis AM. Ex M agatur MO parallela AC conveniens cum BC in O. Modo inveniantur inter MO, & AM tot mediæ proportionales, quot indicat genus hyperbolarum deſcribendarum. Nimirum una media, ſi deſcribenda ſit hyperboles communis. Nam tum, dictis $AC = a$. $AB = b$. $AM\ x$. MN ordinata $= y$; erit profecto $BM = b+x$. Ergo $MO = a + \frac{ax}{b}$. Quare ſi Fig. 39.

MN una media proportionalis inter MO, & AM; fiet $a + \frac{ax}{b} . y :: y . x$. Et erit $yy = ax + \frac{axx}{b}$.

Quæ vulgaris eſt hyperboles. Dein duæ mediæ inter MO, & AM inveniendæ ſunt; quarum, ſi prima MN, erit N in hyperbola Cubica prioris ſpeciei; ſi vero ſecunda, erit N in hyperbola Cubica ſecundæ

Digitized by Google

ſpeciei. Etenim proportio primo caſu erit continua, $a + \frac{ax}{b}$, y, $\frac{yy}{a+x}$, x. Secundo vero caſu proportio continua erit $a + \frac{ax}{b}$, $\frac{yy}{x}$, y, x. Et inde primo caſu prodibit hyperboles Cubica prima $y^3 = aax + \frac{2aaxx}{b} + \frac{aax^3}{b^2}$. In ſecundo vero caſu prodibit hyperboles Cubica ſecunda $y^3 = axx + \frac{ax^3}{b}$. Et ita de reliquis.

Inventio harum mediarum proportionalium comparatur quidem ſine Curva quæſita, quam per eas juſſimus deſcribi. Nam duæ mediæ proportionales, quæ deſcribunt Cubicas, ſeu Curvas ſecundi generis, vel Lineas tertii ordinis, obtinentur probe per interſectionem duarum Curvarum primi generis: & ſupra id effectum fuit *pag.* 59. *&* 60. Atque tres mediæ proportionales, quæ deſcribunt Curvas tertii generis, inveniuntur quidem per interſectionem duarum Curvarum ſecundi generis. Quod exploratiſſimum eſt per recentes Geometriæ analyticas methodos; & ita de reliquis. Item jam tradidimus rationem deſcribendi in Cono infinitas has Curvas. Eæ in Cono deſcriptæ præbebunt medias quæſitas, quæ adhiberi debent in deſcriptionem Curvæ Geometricam in plano; de qua modo agimus.

Modus nunc a nobis præbebitur deſcribendi hujuſmodi Curvas infinitas organice; qui ſimplicior videtur antecedentibus, generalis quidem; & ad praxim facile accomodatur.

Sit

Sit Regula quædam recta AB, quæ erit diameter, ſeu linea abſciſſarum omnium Parabolarum. Inſiſtat illi AC in angulo ordinatim poſitarum quolibet. Nunc ſint Parabolæ relatæ ad omnes priores ſpecies omnium generum; ideſt Parabolæ, in quibus poteſtas abſciſſæ eſt ſemper ſimplex, ſeu uti dicunt eam, Linearis. Agatur per C alia recta regula CD parallela AB. Modo portiones lineæ AC relationem habentes cum portionibus acceptis in CD determinabunt Curvæ naturam. Etenim, ſi abſcindatur in CD portio CF æqualis abſciſſæ alteri portioni AF in AC; junctis filo aliquo punctis A, F; & ex E ducta linea EG parallela AB, occurrente cum AF in N; erit punctum N in Parapola primi generis. Quod ſi regula, ſeu filum AF ita ſemper circa A irrotetur inſiſtens ſupra CD, ut eodem tempore, commotâ EG ſibi parallelâ, ſeu parallelâ AB, fiant ſemper portiones AF, CF æquales; erit dicta Parabola per hanc continuationem deſcripta. Atque ejuſmodi deſcriptio organica ſemper in inſequentibus retineatur]. Nam ſit $AC = a$, $AM = EN = x$. $MN = AE = y = CF$. Sunt verò ſimilia triangula AEN, ACF. Igitur erit, $y . x :: a . y$. Sive $y^2 = ax$. Quæ eſt dicta Parabola. Fig. 40.

Sed ſit eadem CF tertia proportionalis in ordine duarum AC, AE. Erit ea $= \frac{yy}{a}$. Igitur propter ſimilia dicta triangula, quia $y . x :: x . \frac{yy}{a}$; habebitur $y^3 = a^2 x$. Quæ eſt Parabola Cubica prioris ſpeciei. Quod ſi eadem CF ſtatuatur quarta proportionalis in ordine duarum AC, AE; erit CF quidem

quidem $= \frac{y^3}{a^2}$. Et inde æquatio fiet eadem ratione uti ſupra; $y^4 = a^3 x$. Quæ eſt Parabola quadrato—quadratica prioris ſpeciei; atque ita deinceps; ſi CF ſtatuatur quinta, ſexta, ſeptima & ſic infinitè proportionalis in ordine linearum AC; AE; punctum N erit ſemper in omnibus primis ſpeciebus aliorum generum Parabolarum.

Quod ſi ſpecies poſtremæ Parabolarum ſint deſcribendæ omnium generum, in quibus poteſtas non abſciſſæ, ſed lateris recti eſt linearis; ſint in rectis CD, & AC quamtumvis productâ portiones CF, AE; ita ut AE ſit æqualis CF; & fiant quæ ſupra, ductâ EG parallelâ AB; erit punctum N in Parabola primi generis; ſi verò AE, fuerit tertia proportionalis poſt latus rectum AC, & portionem CF, erit N in Cubica alterius ſpeciei; ſi fuerit AE quarta proportionalis poſt AC, & CF; erit N in Parabola quadrato — quadratica alterius ſpeciei. Et ita de reliquis Parabolis poſtremarum ſpecierum. Si AE fuerit quinta, ſexta, ſeptima proportionalis poſt AC, CF. Etenim, effectis omnibus uti ſupra; & retentâ eadem denominatione; cum ſimilia ſint triangula ACF, AEN; erit primo caſu $y.\ x :: a.\ y$. Quare $ax = y^2$; ſecundo caſu; quia habebitur tum CF media proportionalis inter AC, & AE $= \sqrt{ay}$; fiet $y.\ x :: a.\ \sqrt{ay}$. Et idcirco $y^3 = axx$; Parabola Cubica alterius ſpeciei; tertio caſu; quia CF erit prior duarum mediarum proportionalium inter AC, & AE; idcircoque $= \sqrt[3]{aay}$; fiet proportio

portio, $y . x :: a . \sqrt[3]{aay}$. Et $y^4 = a x^3$. Quæ eſt Parabola quadrato — quadratica alterius ſpeciei.

Denique ſi deſcribendæ ſint Parabolæ ſpecierum intermediarum inter primas, & poſtremas; tum hac ratione aliquo pacto diverſa eſt procedendum. Primò ponendæ ſunt deſcriptæ Parabolæ primarum ſpecierum, ac dein in ordine lateris recti *AC* [*Fig. eadem*] & cujuslibet ordinatæ ipſarum Parabolarum inveniendæ ſunt proportionales tertia, quarta, quinta, ſexta atque ita deinceps. Hæ vero inventæ proportionales adplicentur eidem abſciſſæ ordine; & dabunt ordine ſpecies omnes alias intermedias. Sic quæratur ſpecies intermedia prima inter primam, & poſtremam ſpeciem Parabolæ quadrato — quadraticæ. Cubicæ Parabolæ non habent ſpecies intermedias inter primam, & poſtremam jam enunciatam. Deſcripta ponatur Parabola quadrato — quadratica prioris ſpeciei $y^4 = aaax$. Sit ea AND. cujus abſciſſa AM, & ejus ordinata MN. Igitur habetur jam, Fig 41. noſciturque ordinata MN juxta priorem methodum has Curvas deſcribendi ſupra expoſitam. Nam MN prior eſt ex tribus mediis proportionalibus inter latus rectum AC, & abſciſſam AM determinatam jam, & notam. Quare inveniatur tertia proportionalis in ordine AC, & MN. Et ſit MO. Erit O in Curva quadrato — quadratica Parabolica intermediæ ſpeciei. Etenim eſt MN $(= y) = \sqrt[4]{aaax}$. Cum jam ſit $y^4 = a^3 x$. Et eſt x jam cognita. Ergo, ſi in ordine lateris recti AC, & ordinatæ MN inventa eſt tertia proportionalis pro Parabola qua-

Digitized by Google

quadrato — quadratica ſpeciei mediæ, uti nuper diximus; dictâ hac tertiâ proportionali z, habebitur $a . \sqrt[4]{aaax} :: \sqrt[4]{aaax} . z$. Ergo erit $a^4 z^4 = a^6 xx$. Sive $z^4 = a^2 x^2$. Quæ ſpecies intermedia eſt quæſita; quæque vero reducenda eſt ad $z^2 = ax$; uti non ſemel eſt oſtenſum. Et ita de reliquarum Parabolarum intermediis ſpeciebus. Et adverte, eſſe $\sqrt[4]{aaax}$ majorem hìc quàm $\sqrt[2]{ax}$. Nam in noſtro caſu x (A M) eſt ſemper eadem quantitas. Sed $\sqrt[4]{aaa}$ eſt $a^{\frac{3}{4}}$. Et $\sqrt[2]{a}$ eſt $a^{\frac{1}{2}}$. Ergo illa major eſt iſtâ.

De Ellipſibus, & de hyperbolis eodem modo organico deſcribendis dicemus. Et ſit, ut in antecedenti pro ipſarum latere tranſverſo recta AB, pro Fig. 42. 43. latere recto, ſeu parametro linea recta A C. Compleaturque in Ellipſibus parallelogrammum A D; cujus latera AC, CD producantur ſi opus. In hyperbolis verò; productâ A B in directum versùs A, agatur ei parallela ex C puncto linea C D. Et, ſiquidem eæ Ellipſes, ſive hyperbolæ ſint deſcribendæ, quæ ad primas ſpecies referuntur; ratio A F abſciſſæ in A C ad C F ſumptam in C D determinabit Curvæ ſpeciem deſcriptam. Siquidem ſi æquales eæ erunt, junctis A F, BE; punctum interſectionis earum N erit in Ellipſi, vel hyperbola primi generis; & ita de reliquis punctis. Nam ducta ex N puncto ordinatim poſitâ N M, ſeu parallelâ ductâ N M ipſi

ipſi A C; ſi ſint $AC = a$, $AB = b$, abſciſſa $AM = x$; & ordinata $MN = y$; quare eſt $AM = b - x$ in Ellipſi; & $= b + x$ in hyperbole; reperietur, propter ſimilia triangula B M N, B A E, ipſa $AE = \frac{by}{b \pm x} = CE$. Igitur, cum ſimilia quoque ſint triangula N M A, A C F; fiet $y . x :: a . \frac{by}{b \pm x}$.

Et conſequenter habebimus æquationem $ax = \frac{byy}{b \pm x}$.

Sive $yy = ax \mp \frac{axx}{b}$. Quæ prima eſt Ellipſis, vel hyperboles Apolloniana. Sed ſi portio C F fuerit tertia proportionalis in ordine lateris recti A C, & portionis A E; invenietur ipſa $CF = \frac{bbyy}{abb \pm 2abx + ax^2}$;

idcircoque, propter eandem proportionem, quæ oritur ex ſimilitudine triang. N M A, A C F; erit, facta multiplicatione mediorum, & extremorum, inſtitutaque æquatione; $y^3 = aax \pm \frac{2aaxx}{b} + \frac{aax^3}{bb}$;

quæ eſt Ellipſis, vel hyperboles Cubica prioris ſpeciei. Et ſi eadem portio C F fuerit quarta proportionalis in ordine earumdem A C, A E; eadem ratione demonſtrabitur punctum N eſſe in Ellipſi, vel hyperbole quadrato — quadratica prioris ſpeciei;

$$y^4 = a^3 x \mp \frac{3a^3 xx}{b} + \frac{3a^3 x^3}{bb} \pm \frac{a^3 x^4}{bbb}.$$

Atque ita deinceps.

Digitized by Google

Contraria ratione, ſiquidem, effectis omnibus uti antea, fuerit jam iterum portio A E æqualis CF; deſcribetur ſemper prima Ellipſis, vel hyperboles Apolloniana; ſed vero ſi AE fuerit tertia proportionalis in ordine A C lateris recti, & portionis CF; erit punctum N in Cubica Ellipſi, vel hyperbole alterius, ſeu ſecundæ ſpeciei. Eritque in poſtremis omnibus ſpeciebus, ſi A E fuerit in ordine lateris recti A C, & portionis CF tertia, quarta, quinta, ſexta proportionalis; & ita deinceps. Quandoquidem, retentis iiſdem indiciis; fiet quoque BM = $b \pm x$. Et A E, propter ſimilia triangula BMN, BAE, erit quoque $= \frac{by}{b \pm x}$. Igitur in caſu æqualitatis AC, CF, erit BF $= \frac{by}{a \pm x}$. Sed ſimilia ſunt triangula MAN, CFA; ergo $y . x :: a . \frac{by}{b \pm x}$. Et $ax = \frac{byy}{b \pm x}$. Sive $yy = ax \pm \frac{axx}{b}$. Quæ eſt Ellipſis, ſive hyperboles prima Apolloniana. Sed ſi AE fuerit tertia proportionalis in ordine AC, & CF; quia tum CF fiet, quippe media inter AC, & AE proportionalis, $= \sqrt{\frac{aby}{b \pm x}}$; erit, propter eandem ſimilitudinem triangulorum expreſſam in terminis, ſeu indiciis quantitatum, & facta æquatione producti mediorum cum producto extremorum,

ax

$ax = \sqrt{\frac{abyyy}{b \pm x}}$. Sive $y^3 = axx \pm \frac{ax^3}{b}$. Quæ eſt Ellipſis, ſive hyperboles Cubica alterius ſpeciei. Erit autem Ellipſis, ſeu hyperboles quadrato — quadratica alterius ſpeciei; ſi A E ſtatuatur quarta proportionalis in ordine earumdemmet linearum AC, CF. Nam erit tum CF, quippe prima ex duabus mediis proportionalibus inter AC, & AE, $= \sqrt[3]{\frac{aaby}{b \pm x}}$. Et inde per modo dicta; fiet quoque $ax = \sqrt[3]{\frac{aaby^4}{b \pm x}}$. Et hinc $y^4 = ax^3 \pm \frac{ax^4}{b}$. Quæ eſt quadrato — quadratica Ellipſis, ſeu hyperboles alterius ſpeciei. Et ita de reliquis.

Quod ſi deſcriptæ expoſcantur hac eadem methodo Ellipſes, & hyperbolæ ſpecierum intermediarum. Tum ponantur primo deſcriptæ Ellipſes, ſeu hyperbolæ primarum ſpecierum. Dein ſumatur linea recta, quæ ſit quarta proportionalis in ordine lateris tranſverſi, lateris recti, & ejuſdem lateris tranſverſi abſciſsâ aliquâ imminuti in Ellipſibus, ſed aucti in hyperbolis; ac poſthac inveniantur in ordine hujuſce rectæ lineæ, & ordinatæ Ellipſis, vel hyperbolis, quæ ordinata illi convenit abſciſſæ, proportionales tertia, quarta, & ita deinceps; & erit factum, quod quærebatur. Ita ſi poſcitur ſpecies intermedia prima Ellipſis, vel hyperbolæ quadrato — quadraticæ, eſt quarta proportionalis dicta in ordine lateris

 tran-

tranſverſi, lateris recti, & ejuſdem lateris tranſverſi imminuti, vel adaucti abſciſsâ, $= \frac{ab \mp ax}{b}$ pro Ellipſibus, & hyperbolis. Modo, ſi efficiatur uti hæc quantitas ad radicem quadrato — quadratam ordinatæ Ellipſis, vel hyperbolis quadrato — quadraticæ prioris ſpeciei, quæ eſt

$$\sqrt[4]{a^3 x \mp \frac{3a^3xx}{b} + \frac{3a^3x^3}{bb} \mp \frac{a^3x^4}{bbb}}$$ uti

ſupra; ita hæc eadem radix quadrato — quadratica ad quartam, quæ dicatur z; & efformetur poſtrema æquatio, invenietur ſpecies intermedia Ellipſis, vel hyperbolis quæſita; quæ tamen ad communem Ellipſim, vel hyperbolem reducetur: & ita de reliquis. Q. F. O.

De Circulis vero infinitis hac ratione deſcribendis nil eſt adiiciendum. Nam, quæ de Ellipſibus dicta ſunt, locum in Circulis habent omni ex parte; modô latus rectum exæquet latus tranſverſum, & angulus ſub ipſis comprehenſus, ſeu ordinatarum ſit rectus.

Profecto, uti cernitur, hæc via modo tradita deſcribendi Curvas haſce aliud non expoſcit, quàm progreſſionem proportionis Geometricæ, cujus duo priores termini innoteſcunt; quo nil facilius, atque ſimplicius videtur eſſe in Geometria. Quare hac parte etiam, non modo quia eſt Mechanica deſcriptio, præferenda longe hæc eſt rationi priori eaſdemmet Curvas deſcribendi: juxta quam mediæ proportionales, non progreſſio continua proportionalium, ſunt adinveniendæ.

CAPUT

CAPUT V.

De Ciſſoide Dioclis, & Conchoide Nicomedis; ac de ratione extendendi eas in infinitum.

IN explicanda natura Conicarum Sectionum, earumdemque in infinitum proceſſu oſtendendo longiores fortaſſe paullò fuimus, quàm ut operis ratio expoſcere viſa foret. Et quidem illarum omnium Curvarum non modo propriam naturam, & præſtantiores proprietates expoſitione complexi ſumus; verùm etiam generationem earum ex Coni Sectionibus; tùm Geometricam in plano deſcriptionem, atque aliam deſcriptionem organicam miniſtravimus: nonnullaque problemata confecimus ad ipſaſmet Sectiones Conicas ſpectantia non infimæ notæ. Profecto cum de ſectionibus Conicis in Geometria agitur; de magna re agitur. Tum quia Mathematica inventa, & Theoremata, & problemata multam partem in illis, veluti in fundamento, ac fulcimine inſiſtunt; & diſciplinæ ceteræ Mathematicæ illis egent, ex illis profluunt, in illis innituntur; quùm etiam quoniam nova promota Geometria, novæque illius methodi Inveniendi plurimùm in Sectionibus Conicis, & ob Sectiones etiam Conicas procul dubio valent. Sed aliarum Curvarum brevior, conſtrictiorque erit pertractatio. Etenim, etſi Conicas Sectiones eæ longe numero ſuperent; atque, etſi nullam ex iis cognitu dignam præterire nobis animus ſit, ac propoſitum; tamen in earum natura, & proprietatibus proſequendis tanta non videtur nobis diſſertatione opus eſſe, quanta in Sectio-

ctionibus Conicis exponendis uſi profecto, ſicuti diximus, debebamus.

Primo loco obviæ nobis fiunt Ciſſoides Dioclis, & Conchoides Nicomedis. Utraque Curva à ſuis auctoribus eum in finem excogitata fuit, ut magno apud Veteres problemate de duabus mediis proportionalibus inveniendis fieri poſſet ſatis. Nam, licet idipſum problema a Veteribus ſolutum bene fuerit, uti inferiùs oſtendemus, per Conicas Curvas mutuò interſectas; tamen, quia tunc temporis valde operoſum judicabatur, quod initio præfati ſumus, Coni Sectiones in plano deſcribere; eam ſolutionem non tanti fecerunt Veteres ipſi, ut ad alias ſolutiones excogitandas, inque vulgus edendas animum non adplicuerint. Plerique illorum problematis conſtructionem inſtrumentis tantùm perfecerunt; ut ad praxim ſolutio facilius duceretur: cujuſmodi fuere conſtructiones Eratoſthenis, Heronis, Philonis. Quidam verò, ut res Geometrico modo magis perageretur (qua de cauſſa equidem ignoro: quid enim magis Geometricum, ideſt quod quantitatem, ſive extenſionem contineat, quàm Mechanica operatio; modo Geometriæ legibus adſtricta?) Curvas alias excogitarunt ad id operis plane accomodatas. Quæ certe facile deſcribuntur, & idcirco videntur faciliùs conficere problema. Hanc viam præ aliis Diocles, & Nicomedes tenuere; quando ille Ciſſoidem, Conchoidem iſte commenti ſunt.

Fig.44 Ciſſoidis generatio in hunc modum eſt intelligenda. Exponatur Circulus quilibet ABCD, cujus centrum E: & in illo ſe mutuo normaliter ſecent AC, BD. Tum ſi vertex Curvæ deſcribendæ ſtatuatur punctum A; abſcindantur ex quadrantibus BA, BC Circuli duæ quævis portiones æquales BF, BG; & excitatâ FH ipſi BD parallela, junctâque rectâ AG;

AG; hæc ſecabit in puncto N rectam FH. Et erit punctum N in Curva quæſita. Si modo abſcindantur aliæ duæ portiones, & eadem fiant; exiſtet etiam aliud punctum N in Curva eadem; itâque continuatione procedatur. Et deſcribetur Curva ANN; quæ vero pertranſiens vi deſcriptionis per punctum B poterit infra B continuari, ſi identidem erigantur parallelæ ipſi FH ex punctis G rectæ GN ex alia parte GI; & lineæ AG ducantur, non ad G puncta, ſed ad F; ſeu jungantur AF. Nam hæ ipſæ AF productæ præbebunt puncta N Curvæ continuatæ; hæcque Curva eſt, quæ *Ciſſoides* vulgo dicta a Græco vocabulo, hederæ nimirum ſpeciem gerens, dum ſuo Circulo adhæret, Diocli tribuitur inventori.

Ciſſoides talis eſt naturæ; ut ſumpto in circumferentia Circuli genitoris puncto quovis F, ductâque FH diametro AC perpendiculari, & ſecante Ciſſoidem in puncto N, ſint ſemper continuè proportionales rectæ lineæ CH, FH, AH, NH. Demonſtratur. Ducta per punctum N rectâ ANG, quæ in G occurrat peripheriæ Circuli Genitoris, æquales fiunt arcus BF, BG; idcircoque, ductâ rectâ GI ipſi BD parallelâ, æquales erunt quoque portiones EH, EI. At vero propter ſimilia triangula AGI, ANH, eſt AI ad GI, ſive FH uti AH, ad NH. Igitur erit quoque CH. FH :: AH. NH. Sed propter Circulum; CH. FH :: FH. AH. Igitur ex æquaratione; FH. AH :: AH. NH. Quare quatuor continuæ proportionales erunt CH, FH, AH, NH.

Hinc facile fuit Diocli inter datas duas rectas lineas binas medias proportionales invenire. Quippe ſi P, & G ſint duæ rectæ lineæ datæ, inter quas oporteat duas alias medias proportionales invenire: deſcriptâ ſuâ Curvâ ANB, faciebat ut P, ad G ita CE, ad EK; ductâque rectâ CKN, quæ occurreret Fig.45.

ret

ret Curvæ A B N in puncto N, demittebat per punctum N ad diametrum Circuli Genitoris A C perpendicularem F N H; atque adeò per ipſius Curvæ ANB naturam, habebat inter CH, & N H, duas medias proportionale F H, A H; cum interim C H prima eſſet ad N H ultimam, ut C E, ad E K; ſive etiam ut P prima ad G ultimam ex datis. Unde nil aliud ipſi ſupererat; quàm ut faceret primò ut C F, ad F H; ita P, ad quartam; quæ ſit dicta Q. Et ſecundò ut F H, ad A H, ita Q, ad R. Nam quemadmodum erant continuæ proportionales, quatuor rectæ lineæ C H, F H, A H, N H; ita etiam continuæ erunt proportionales quatuor magnitudines, P,Q, R,G.

Hinc etiam; ſi ex puncto A erigatur recta A L ipſi A C perpendicularis, & puncta Curvæ A N B referri debeant ad puncta rectæ lineæ AL per demiſſas perpendiculares N M; haud difficile erit æquationem invenire, quæ ejuſmodi relationem nobis ſub oculos ponat. Nam ſi ponatur diameter $AC = a$, abſciſſa $AM = x$, & ordinata $MN = y$; propter parallelogrammum A N, erit etiam $NH = x$; & $AH = y$. Unde, cum ſit reliqua portio $CH = a-y$; & per Circuli naturã inveniatur recta $FH = \sqrt{ay-yy}$; ob continuò proportionales C H, F H, A H, N H; erit ut $a-y$ ad $\sqrt{ay-yy}$, ita y, ad x. Sive etiam ut $aa-2ay+yy$ ad $ay-yy$, ita yy, ad xx. Sed $aa-2ay+yy$ eſt ad $ay-yy$, ut $a-y$, ad y; quare erit ut $a-y$ ad y, ita yy, ad xx; proptereaque, factâ mediorum, & extremorum mutua multiplicatione, habebitur $y^3 = axx-yxx$ pro æquatione quæſita ad Ciſſoidem.

Ex hac æquatione liquet naturam Ciſſoidis hanc eſſe, ut Cubus cujusvis ordinatæ M N deficiat a Solido,

lido, quod ſit ex recta conſtanti A C in quadratum abſciſſæ A M, Solido alio, quod ſit ex eodem abſciſſæ AM quadrato, in ipſam ordinatam M N; unde facile nobis erit alias Curvas lineas ad ipſius ſimilitudinem in infinitum effingere; ſcilicet, ſi faciamus, ut non modo Cubus, ſed quævis alia ſuperior cujuſvis ordinatæ poteſtas deficiat a producto homogeneo, quod ſit ex aliqua recta linea conſtante, parametro deinceps nominando, in poteſtatem reliquam abſciſſæ correſpondentis, producto alio homogeneo, quod ſit ex eadem abſciſſæ poteſtate in ipſam ordinatam. Atque, eadem retenta denominatione, ſi porrò dicatur *m* index poteſtatis, ad quam aſcendit abſciſſa; poterunt hæ omnes Ciſſoides hac unica æquatione generali definiri; $y^{m+1} = ax^{m} - y\,x^{m}$, dummodò non ſupponatur $m = 1$; quo caſu æquatio evadet $yy = ax - yx$; locus ad hyperbolem inter aſymptotos. Aliis numeris indicante poteſtate *m* ſemper erit Ciſſoides, ſeu ſpecies Ciſſoidis.

Verumtamen, ut methodus conſtans, & generalis habeatur omnes haſce Ciſſoides deſcribendi organicè ſimili modo, quo ſuperiori capite Conicas omnes ſectiones in infinitum deſcripſimus; aſſumatur recta A B pro diametro, ſive linea abſciſſarum, & recta magnitudine data A C pro Parametro ipſarum; quæ contineant angulum C A B, æqualem ei, quem ordinatæ cum abſciſſis debent conſtituere. Nam, tametſi in Ciſſoide Dioclis ordinatæ ad angulos rectos ſuis abſciſſis ſint applicatæ, nihil tamen vetat, quominus eas in quovis alio angulo adplicatas conſideremus. Tum per punctum C ducatur recta C D ipſi A M parallela, in qua ſumptâ portione quavis C E; abſcindatur ex A B portio altera A F; junganturque Rectæ, ſeu Regulæ AE, CF, quæ mutuò ſe ſecent in N pun-

Fig.46.

punćto N; erit hoc punćtum N in Ciſſoide Dioclis, ſive in prima Ciſſoide; ſiquidem portio A F fuerit quarta proportionalis in ordine parametri A C, & portionis C E; erit verò in ſecunda Ciſſoide; ſi eadem portio A F fuerit quinta proportionalis in ordine earundem linearum AC, AE; atque ita deinceps. Continuata verô interſećtio N per determinatum motum Regularum A E, C F præbebit Curvam generatam.

Ducatur enim ad punćtum N rećta M N ipſi A C parallela; & ex punćto N ducatur rećta N O æquidiſtans diametro A B, ponaturque parameter $AC = a$; abſciſſa AM, ſive $ON = x$; & ordinata M N, ſive AO, y; eritque portio altera $CO = a - y$: & propter ſimilitudinem triangul. A O N, A C E; invenietur denique $CE = \frac{ax}{y}$. Unde ſi portio A F fuerit primò quarta proportionalis in ordine parametri AC, & portionis C E; erit $AF = \frac{ax^3}{yyy}$; & propterea, quia propter ſimilitudinem triangul. C O N, C A F; C O eſt ad O N, ut C A, ad A F, erit ut $a - y$ ad x, ita a ad $\frac{a x^3}{yyy}$; proindeque erit $a x = \frac{a a x^3 - a y x^3}{yyy}$; ſive $y^3 = a x x - y x x$; quæ eſt æquatio ad Ciſſoidem Dioclis; ſive primam Ciſſoidem. Etſi porro eadem portio A F ſtatuatur quinta proportionalis in ordine earundem linearum A C, C E, invenietur ipſa $AF = \frac{a x^4}{y^4}$; adeòque cum ſit

ut

ut $a - y$ ad x, ita a ad $\frac{a x^4}{y^4}$; erit $a x = \frac{a a x^4 - a y x^4}{y^4}$ ſive $y^4 = ax^3 - y x^3$; quæ eſt æquatio ad ſecundam Ciſſoidem; atque ita methodus in infinitum procedet.

Ceterum hæ Ciſſoides non abs re dici poterunt aliquo modo per analogiam aliquam Ciſſoides Ellipticæ; quandoquidem in iis poteſtas ordinatæ deficit a producto homogeneo, quod fit ex parametro in reliquam poteſtatem abſciſſæ, producto alio, quod ſit ex eadem poteſtate abſciſſæ in ipſam ordinatam: eòque magis, quòd aliæ Ciſſoides ad ipſarum ſimilitudinem excogitari poſſunt, in quibus, cum poteſtas ordinatæ excedat productum parametri in poteſtatem reliquam abſciſſæ, producto alio, quod fit ex eadem abſciſſæ poteſtate in ipſam ordinatam, non immerito per analogiam aliquam hyperbolicæ Ciſſoides dici eæ queunt. Deſignantur autem hæ aliæ Ciſſoides omnes hac unica æquatione generali $y^{m+1} = a x^m + y x^m$; vocando a parametrum, y ordinatam, & x abſciſſam correſpondentem; ponendoque etiam litteram m, pro exponente poteſtatis, ad quam aſcendit abſciſſa: & deſcribentur eadem ferè ratione ac Ciſſoides Ellipticæ.

Nam ſi recta A B ſit earum diameter, ſive linea abſciſſarum, & A C parameter earumdem, ducatur per punctum C recta C D ipſi A B parallela; & ſumptâ in ea portione quavis CE, abſcindatur ex A B portio altera minor A F: & productâ C A uſque in G, ut ſit A G ipſi C A æqualis, jungantur rectæ, ſeu Regulæ A E, GF, quæ ſibi mutuò conveniant in Fig 47.

aliquo punćto N; cum portio AF minor ponatur CE; erit hoc punćtum N in prima Ciſſoide hyperbolica, ſi portio minor AF fuerit quarta proportionalis in ordine Parametri AC, & portionis CE: erit vero in ſecunda Ciſſoide hyperbolica, ſi eadem portio AF fuerit quinta proportionalis in ordine earundem linearum AC, CE, atque ita deinceps.

Dućtâ ſiquidem ad punćtum N rećtâ MN ipſi AC parallelâ; erećtâque ex eodem punćto N rećta NO, diametro AB æquidiſtanti; ponantur AC, ſive $GA = a$; MN, ſive $AO = y$; & AM, ſive $ON = x$, eritque tota $GO = a + y$: & propter ſimilitudinem triangulorum AON, ACE, invenietur $AE = \frac{ax}{y}$. Unde, ſi fuerit primò portio AF quarta proportionalis in ordine parametri AC, & portionis CE, erit $AF = \frac{ax^3}{yyy}$: & propterea, quia propter triangula ſimilia GON, GAF; eſt GO, ad ON, ut GA, ad AF; erit ut $a+y$, ad x, ita a, ad $\frac{ax^3}{yyy}$; proindeque erit $ax = \frac{aax^3 + ayx^3}{yyy}$. Sive $y^3 = axx + yxx$: quæ eſt æquatio ad primam Ciſſoidem hyperbolicam. Et ſi fuerit ſecundò eadem portio AF quinta proportionalis in ordine earumdem AC, CE; invenietur ipſa $AF = \frac{ax^4}{y^4}$. adeoque, cum ſit ut $a+y$, ad x, ita a, ad $\frac{ax^4}{y^4}$; erit $ax = \frac{aax^4 + ayx^4}{y^4}$; ſive $y^4 = ax^3 + yx^3$; quæ

quæ eſt æquatio ad ſecundam Ciſſoidem hyperbolicam. Et ita de reliquis.

Atque hæc de Ciſſoidibus tàm Ellipticis, quàm hyperbolicis ad ſimilitudinem Ciſſoidis Dioclis a nobis excogitatis dixiſſe ſufficiant. Nunc ad Conchoidem Nicomedis gradum facimus, quæ ejuſmodi ortum habet. Exponatur recta quæpiam D E; cui ad angulos rectos inclinetur recta altera A B; quæ protrahatur uſque ad aliquod punctum C: & ex eo ducantur versùs eandem partem D E plures rectæ lineæ C N, quæ ipſi D E occurrant in punctis L; & ex iis abſcindantur portiones LN ſingulæ AB æquales; erit Curva linea A N N, quæ tranſit per extrema earum linearum, illa eadem Curva linea, quæ a Nicomede excogitata Conchoides nominatur; diceturque ejus Polus punctum C, & Regula recta DE: proindeque talis Curvæ ea erit natura, ſive proprietas præcipua, ut ſi a Polo ad ipſius parametrum plures rectæ lineæ ducantur, non quidem eæ, ut in Circulo, ſed ipſarum portiones regulâ, & Curvâ comprehenſæ ſibi invicem æquentur: patetque ex ipſa geneſi, Regulam D E eſſe aſymptoton Curvæ A N N: ſive, quod idem eſt, Curvam ipſam A N N nunquàm poſſe concurrere cum Regula D E in aliquo puncto; licèt ad ipſam continuè appropinquetur; cum ſemper inter eas obliquè interiiciatur diſtantia LN intervallo principali AB æqualis. Fig.48.

Hujus aliæ Curvæ beneficio manifeſtum eſt, fieri poſſe, ut ex dato puncto ducatur ad datum angulum recta linea, ita ut portio, quæ inter anguli latera interiicitur aliam datam rectam lineam adæquet; dummodo ipſum datum punctum in dato angulo non exiſtat. Nam ſi E D N fuerit angulus datus, & C punctum extrà ipſum exiſtens, ex quo ducenda ſit recta linea quæſita; demittatur ex puncto Fig 49.

cto

cto C recta CB ipſi DE perpendicularis, eaque extendatur uſque in A; ut ſit AB alteri datæ rectæ lineæ æqualis. Jam porrò Polo quidem C, Regulâ DE, & intervallo AB deſcribatur linea Conchoides AN, quæ occurret ipſi DN in puncto N: & palam eſt, per naturam hujus Curvæ, quòd, ſi ducatur ex puncto C ad punctum N recta CLN, portio ipſius LN, utroque anguli latere comprehenſa, ipſi AB ſit æqualis.

Demonſtratur autem Conchoides deſcripta occurrere rectæ DN in puncto N. Nam hæc eſt Conchoidis proprietas altera, quòd ſcilicet, ſi recta quædam linea inter Regulam, & Conchoidem cadat, ea producta ab ipſa Conchoide ſecetur. Sumatur enim in recta linea DN punctum quodvis R; per quod agatur recta PRQ regula DE parallela: & fiat, ut BR, ad BA, ita CR, ad quartam proportionalem, quæ major erit quàm CR; ſicuti BA major eſt, quàm BR. Proindeque, ſi centro C, & intervallo inventæ proportionalis deſcribatur Circulus; hic rectam PQ neceſſario ſecabit in puncto aliquo Q, cum CR ſit omnium minima, quæ a puncto C ipſi PQ duci poſſunt. Jam verô, ductâ rectâ COQ; CR erit ad CQ, ſive ad quartam proportionalem inventam, ut BR, ad OQ; quare erit, ex æqua ratione, ut BR ad BA; ita BR ad OQ: atque adeò, cum æquales ſint rectæ BA, OQ, erit punctum Q in ipſa Conchoide AN. Unde ſi parallela PQ ipſi Regulæ DE ſecet Conchoidem in puncto Q; multò magis eam in puncto aliquo ſecabit recta linea DN obliqua ipſi DE.

Ex eo autem quòd ope Conchoidis fieri poſſit, ut ad datum angulum ducatur ex puncto extrà illum dato recta linea; ita ut portio anguli lateribus contenta aliam datam rectam lineam adæquet; facile fuit

fuit Nicomedi inter datas duas rectas lineas binas alias medias proportionales invenire. Sint etenim CD, DB duæ rectæ lineæ datæ; inter quas oportet duas alias medias proportionales invenire. Conjungantur eæ ad rectos angulos in puncto D: & completo parallelogrammum DA: utraque ipſarum AC, CD ſecetur bifariam in punctis F, & G: tùm juncta BF producatur uſque adeò occurrat rectæ lineæ CD productæ in puncto H: &, erectâ perpendiculari GM, abſcindatur ex ea portio talis, ut junctâ DM, ſit hæc ipſi AF æqualis. Porrò, junctâ rectâ HM, agatur per punctum D recta DE ipſa HM parallela: & angulo exiſtente EDN, ducatur ope Conchoides à puncto dato M recta linea MEN; ita ut portio EN utroque latere anguli intercepta ipſam DM, ſive AF adæquet: ac deinceps juncta recta BN producatur uſque adeò, ut occurrat rectæ AC, in puncto O: atque, his omnibus peractis, inter CD, & DB inventæ erunt duæ mediæ proportionals AO, DN. Fig. 50.

Quoniam enim CD bifariam ſecatur in puncto G, & ipſi in directum adiicitur recta DN, erit rectangulum CND, unâ cum quadrato ex DG æquale GN quadrato. Quare, adpoſito communi GM quadrato, erit rectangulum CND unâ cum quadratis ex DG, & GM æquale duobus GN, GM quadratis: ac proindè, quia DG, GM quadrata ſunt æqualia quadrato, quod ſit ex DM; & GM, GN quadrata ſunt æqualia quadrato, quod ſit ex MN; erit rectangulum CND unà cùm DM quadrato æquale MN quadrato. Et quoniam AB, ſive CD, eſt ad DN, ut AO, ad BD, ſive AC; erit, invertendo, ut DN ad CD, ita AC ad AO; ſed CD eſt ad duplam ipſius DH, ut AF ad ipſius duplam AC. Igitur, ex æqua ratione perturbando, erit ut

ut DN ad DH, ita AF ad AO. Jam verò propter parallelas DE, HM; DN, eſt ad DH, ut EN ad EM; quare erit, ex æqua ratione, ut AF ad AO, ita EN, ad ME: atque, componendo, ut AF, ad FO, ita EN, ad NM: ponitur autem AF ipſi EN æqualis; igitur erit etiam FO æqualis ipſi MN; eritque FO quadratum æquale MN quadrato. Sed MN quadratum oſtenſum eſt æquale rectangulo CND unà cum DM quadrato; & FO quadratum eſt æquale rectangulo COA unà cum AF quadrato; cùm AC ſit ſecta bifariam in puncto F; eique in directum adjecta recta AO; Ergo erit rectangulum CND una cum DM quadrato æquale rectangulo COA unà cum AF quadrato. Eſt autem DM quadratum æquale AF quadrato; igitur erit etiam rectangulum CND æquale rectangulo COA; & propterea erit ut CO ad CN, ita DN, ad OA. Jam vero CO eſt ad CN, ut DB, ad DN, & ut AO, ad AB: quare ſit ut DB, ad DN, ita DN, ad AO, & ita AO, ad AB, ſive CD; proindeque quatuor magnitudines DB, DN, AO, CD continuè proportionales erunt. Q. F. O.

Porro ſi puncta ipſius Conchoidis referri debeant ad rectam AB per demiſſas perpendiculares NM; haut difficile erit ex ipſa Curvæ natura æquationem invenire, quæ relationem hanc nobis oſtendat. Nam, ſi ponatur intervallum $AB = a$, diſtantia CA Poli à Conchoidis vertice, $= c$, abſciſſa
Fig. 51 $AM = x$, & ordinata $MN = y$; erit $CM = c - x$, & $BM = a - x$: eritque inſuper, propter triang. rectang. CMN, $CN = \sqrt{yy + cc - 2cx + xx}$: & per naturam Conchoidis $LN = a$. Unde cum ſit

ſit ut CM ad CN, ita BM, ad LN, erit ut $c-x$ ad $\sqrt{+yy+cc-2cx+xx}$, ita $a-x$, ad a; adeoque terminos omnes quadrando, ut $cc-2cx+xx$, ad $yy+cc-2cx+xx$, ita $aa-2ax+xx$, ad aa; & conſequenter dividendo ut, $cc-2cx+xx$ ad yy, ita $aa-2ax+xx$ ad $2ax-xx$. Unde facta mutuà extremorum, ac mediorum multiplicatione, invenietur $aayy-2ayyx+yyxx = 2accx-ccxx-4acxx+2cx^3+2ax^3-x^4$; quę ordinata juxta regulas artis reducetur ad hanc aliā

$$\begin{aligned} x^4 - 2ax^3 &+ 4acxx - 2accx + a^2y^2 = 0; \\ - 2cx^3 &+ ccxx - 2ay^2x \\ &+ yyxx \end{aligned}$$

eaque erit æquatio ad Conchoïdem quæſita.

Cùm autem æquatio ejuſmodi ſit aliquantùm implicata; nec tam claram, ac diſtinctam nobis ingerat Conchoïdis notionem; ſatius erit ejus puncta omnia ad unicum Polum referre, & invenire æquationem, quæ exprimat nobis relationem, quæ erit inter rectas ex Polo ad Conchoïdem ductas, & ipſarum portiones, quæ Polo, & Regula continentur; nempe inter rectas CN, & ipſarum portiones CL. Nam ſi ponatur $CN = x$, & $CL = y$; erit $LN = x-y$; adeoque cum unaquæque ipſarum LN per naturam Conchoïdis ſit æqualis intervallo AB; poſitâ adhuc $AB = a$, invenietur æquatio $y - x = a$: quæ ſanè longe ſimplicior eſt antecedente, & magis apertam nobis reddit Conchoïdis naturam, cum oporteat, Conchoïdem ANN talis eſſe naturæ, ut differentia rectarum CN, CL, quòcumque CN pertingat, datam rectam lineam perpetuò adæquet.

Atque huic æquationi inſiſtendo facile nobis erit Conchoides alias in infinitum effingere; ſi faciamus, ut non modo differentia ipſarum linearum CN, CL, ſed differentia quarumlibet poteſtatum earumdem linearum homogeneam poteſtatem alterius datæ rectæ lineæ adæquet. Et eadem omnino retenta denominatione; ſi porrò dicatur *m* exponens poteſtatis, ad quam aſcendunt eæ omnes rectæ lineæ; poterunt omnes illæ in infinitum Conchoides hac unica æquatione deſignari; $x^m - y^m = a^m$: ad quas definiendas ſatis erit in ipſa æquatione valorem exponentis *m* ſubſtituere; quippe ſi ponatur $m = 1$; erit æquatio illa $x - y = a$, quæ primam Conchoidem deſignat. Si vero ponatur $m = 2$; erit eadem illæ æquatio $xx - yy = aa$; quæ ſecundam Conchoidem denotat: atque ita deinceps.

Sed alterius Conchoidis mentionem factam invenio; nempe ut omnia rectangula, quæ fiunt ex portionibus rectarum a Polo ad Curvam ductarum, per
Fig 52. regulam abſciſſis inter ſe ſint æquale. Ita ſi C fuerit Polus, DE regula, & ANN Curva; ducaturque ex Polo ad Curvam recta quævis CLN regulæ occurrens in puncto L; erit ipſius Curvæ ANN proprietas, ut rectangulum, quod fit ex CL, in LN ſit æquale ſemper rectangulo ex CB, & BA: unde poſitis $CL = x$, $LN = y$, $CB = a$, & $BA = c$, erit æquatio puncta hujus Curvæ ad Polum referens $xy = ac$. Quòd ſi autem Curvæ aliæ ad hujus ſimilitudinem in infinitum quærantur; eæ omnes continebuntur in hac æquatione generali $x^m\ y^n = a^m\ c^n$; nempe faciendo, ut productum, quod fit ex duabus quibusvis poteſtatibus ipſarum CL, LN æquale ſit producto, quod fit ex aliis duabus homogeneis poteſtatibus rectarum CB BA.

De

De Conchoide Nicomedis, & Ciſſoide Dioclis peractum eſt. Invenerunt has Curvas ſecundi generis hi auctores ad duas medias proportionales inter datas duas rectas lineas præbendas, uti diximus. Sed manifeſtum eſt per interſectionem duarum Curvarum primi generis id bene confici; quod Veteres etiam effecerunt, veluti indicavimus id *pag. 94*. Et etiam idem præſtitimus *pag.* 58. *&* 59. Quare nihil hic adiicere amplius juvat de ſolutione hujus problematis per interſectionem dictam inventi ſive a Veteribus, ſive a Recentioribus: qui illud & per interſectionem ipſam dictam duarum Curvarum primi generis conficiunt, & per triſectionem anguli dati, & omnibus aliis modis, quibus æquationes trium dimenſionum conſtruuntur. Igitur nil neceſſe erat, ut nova excogitaretur Curva ad duas medias proportionales inter duas datas rectas lineas adinveniendas. Profecto valde facile Curvas invenire, inque medium proferre, nulla determinatione antea præeunte, quòd per Curvā datū aliquod confici debeat problema determinatum: id enim ad ſolam ſolutionem problematis indeterminati reducitur. Sed longe difficilius Curvam ad aliquod datum officium abſolvendum propoſiti antea problematis, ſeu determinatæ quæſtionis meditari per cauſſam, vel, uti ajunt, *a priori*.

Et quidem quàm aſpera, & ſalebroſa via, quàm longa argumentationis ambage Nicomedes problema ipſum duarum mediarum proportionalium inter duas datas rectas lineas per inventam jam ad id Conchoidem confecit. Verùm equidem exiſtimo per analyſim in eam ſolutionem Geometram incidiſſe; quod demonſtrationis finis indicare poſſet. Et noſcimus quidem eam fuiſſe Veterum Geometrarum artem, & Apollonii, & Archimedis, certe id a nonnullis putatur, ut, quod per analyſim ipſi inveniſſent, componendo

 dein;

dein demonſtratione ſynthetica oſtendiſſent, analyſi obſerata. Profecto humanæ mentis vires non ita facile videntur ad quaſdam ſolutiones problematum, & demonſtrationes illarum, ad aliquas maxime ſolutiones, & demonſtrationes Archimedeas, per ſyntheſim adtingere. Dum analyſim dico, non Algebricam analyſim noſtrorum temporum dico; ſed methodum illam inveniendi primò per reſolutionem, non per compoſitionem, & *a priori*. Illam dico analyſim, qua, ut Diophantum Alexandrinum prætereram analyticè ſemper ſua conficientem, uſus etiam fuit Apollonius in nonnullis problematibus; præcipue in poſtremis quæſtionibus Libri primi. Invento problemate per analyſim; determinatoque, ac cognito, quod quærebatur; facile deinde eſt, & proclive compoſitionem, ſeu conſtructionem per ſyntheſim condere, aut nova excogitata demonſtratione ſynthetica, aut etiam eadem analyticâ inventione inversâ, & in compoſitionem immutatâ.

Igitur problema de linea recta ex puncto dato extra angulum datum ducenda intra ipſum angulum, ut ejus portio intercepta inter latera anguli ſit æqualis datæ rectæ lineæ, quod unum erat, quare de Conchoide invenienda Nicomedes cogitavit, ita nos modo conficimus.

Dato angulo *BAC*, & extra illum dato puncto D, ducere ex D lineam DF, ut portio ejus EF intercepta inter latera BA, *CA* anguli dati æqualis ſit datæ lineæ N. Ponatur jam factum eſſe, quod quæritur. Agatur ex D linea DP normalis ad A*C*, (Fig. 53) quæ producta occurrat in M lineæ FM parallelæ emiſſæ AO ex F puncto, ubi ducta ex D linea DEF, cujus pars EF eſt quæſita, occurrit ipſius anguli dati lateri AB. Ex eodem F demittatur quoque FO parallela DM conveniens cum AC in O. Nunc ſint datæ,

datæ, ac cognitæ $AP = d$. $PQ = c$. $AQ = m$. $DP = g$, & $DQ = a$. Sit verò QM ignota x. Erit $DM = a + x$. Eſt quidem AP. PQ :: FM. MQ. Quare $FM = \frac{dx}{c} = PO$. Et eſt DM. MF : : DP. PE.

Igitur $PE = \frac{dgx}{ca + cx}$. Atque $EO = PO - PE = \frac{dx}{c} - \frac{dgx}{ca + cx} = \frac{adx + dxx - dgx}{ca + cx}$. Verùm habetur $FE^2 = FO^2 + EO^2$. Igitur erit æquatio, dictâ b datâ lineâ N, $bb = cc + 2cx + xx + \overline{\frac{adx + dxx - dgx}{ca + cx}}^2$.

Conſtruetur autem ſic.

Sint omnia poſita, uti ſupra. Et ſit angulus datus BSC. Accipiatur in DPQ portio $QH = PQ = c$. Ex H agatur HO parallela SC; quæ ſecet SB latus anguli dati in I. Erit $HI = SP (= AP$. *Fig.* 53.) $= d$. & $QI = SQ (= AQ$. *Fig.* 53.) $= m$. Atquè brevitatis cauſsâ ſit dicta $ad - dg = ee$. Eſt quidem a major g. Quare ee quantitas eſt poſitiva. Sumatur in HO portio $HK = \frac{ad}{c} - \frac{ee}{c}$. Hæc quantitas eſt poſitiva; nam ee minor quantitas eſt, quàm ad: poteſt autem eſſe quantitas major, vel minor HI. Ex K demittatur KY parallela DP occurrens SC alteri lateri anguli dati in Y. Itemque, productâ SQI ex parte S, ſit in illa $QA = \frac{am}{c}$; quæ major ſemper erit QS. Nam $QS = QI = m$; & a major eſt neceſſario c. Ex A agatur AV parallela HI. Fig. 54.

Tum

Tum in eadem A I abſcindatur $QG = \frac{adm - eem}{cc}$.

Quæ eadem ratione ex factis quantitas eſt poſitiva. Poteſt autem eſſe major, vel minor, quàm A Q; & eſſe major, vel minor quàm A S; uti cognoſcetur ex determinatione jam effecta harum quantitatum. Ex G agatur G R parallela etiam S C; in qua ſit $GR = DQ = a$. His præſtitis; aſymptotis A G, A Y deſcribatur Hyperboles R T, quæ pertranſeat per punctum R. Sed centro Y, intervallo $YN =$ datæ lineæ b, deſcribatur circulus. Hic, ſi ſecet in N hyperbolem, ductâ N M parallelâ S C, & occurrente K Y in L, atque S A I in F, & D H in M, præbebit quæſitam Q M (x). Nam junctâ D F, erit EF data linea b inter dati anguli latera interpoſita.

Demonſtratur. Nam eſt $MF = \frac{dx}{c}$ ob ſimilia triangula Q H I, Q M F; & eſt $ML = HK$. Ergo ſi L N dicatur z, erit $NF = ML + LN - MF = z - \frac{dx}{c} - \frac{ee}{c} + \frac{ad}{c}$. Eſt quidem $QF = \frac{mx}{c}$ ob eamdem ſimilitudinem triangulorum. Et $AF = \frac{mx}{c} + \frac{am}{c}$. Verùm ob hyperbolem eſt A F in FN = A G in G R; ideſt $z - \frac{dx}{c} - \frac{ee}{c} + \frac{ad}{c}$ in $\frac{mx}{c} + \frac{am}{c} = \frac{aadm - aeem}{cc}$. Hinc facto primo producto; ac dein facta multiplicatione per c, atque diviſione per m; & conſtituta æqnatione; erit $zx + az - \frac{dx^2}{c} - \frac{eex}{c} = 0$. Sive $z = \frac{dee + eex}{ca + cx}$

Digitized by Google

$\frac{adx + dxx - dgx}{ca + cx}$ (ſubſtitutâ loco c^2 ipsâ $ad - dg$) $= LN$. Eſt verò ob Circulum; $YN^2 = LN^2 + YL^2$. Et $YL = c + x$. Igitur habebitur $bb = cc + 2cx + xx + \left(\frac{adx + dxx - dgx}{ca + cx}\right)^2$.

Quæ eſt æquatio ſupra inventa. Q. F. O.

Si fiat interſectio N Circuli, & Hyperbolis infra S C latus anguli dati, ductâ N L M F, uti ſupra, junctâque D F; hæc producta donec occurrat S C ex alia parte in F, dabit in illa parte etiam E F quæſitam in angulo E S A æquali illi, qui datus fuit: quod eodem modo, mutatis ſignis mutandis, demonſtratur.

CAPUT

CAPUT VI.

DE LINEIS CURVIS,

Quæ à Carteſio in ſua Geometria indicantur.

Etſi Veteres quamplures alias Curvas lineas præter haſtenus recenſitas excogitaverint; attamen, quia eæ ſunt ex earum numero, quæ Mechanicæ, ſive Traſcendentes dici poſſunt; neque ulla ſupereſt alia, quæ ad Curvas Geometricas referri queat, certè ex iis, quarum cognitionem aliquam habemus; hinc eſt, ut ad eas Curvas Geometricas nunc gradum inferamus, quæ ab ipſis recentioribus Geometris propria minerva ſunt inventæ. Nam in his Curvarum Elementis pertractandis, eum quidem ordinem nobis ab initio placuit obſervare; ut primò de Curvis Geometricis; tum ordine de Curvis Mechanicis, ſive Traſcendentibus agendum eſſet. Et quoniam poſt Veteres inter primos omninò hanc provinciam aggreſſus eſt bonis avibus Renatus Carteſius; neque etiam deinceps alii præclari Viri extitiſſent, qui partem hanc Geometriæ ad umbilicum perduxiſſent, niſi illis præcipuè Carteſius præiviſſet; rationi conveniens eſt, ut de Lineis Curvis primo loco agamus, quę à Carteſio in ſua Geometria indicantur.

Et primò quidem Carteſius initio Libri ſecundi ſuæ Geometriæ Inſtrumentum ex variis Regulis compoſitum affert, cujus ope non una, aut plures, ſed infinitæ Curvæ lineæ ſectionibus Conicis magis, magiſque

giſque compoſitæ deſcribi, atque intelligi poſſunt. Eſt autem hujuſmodi Inſtrumentum, quale ſubjectum ſchema nobis exibet: nempè primo concipiendæ ſunt duæ Regulæ ZO, XO; quæ aperiri, & claudi poſſunt ad arbitrium circa punctum O: tum iis inſerendæ plures aliæ Regulæ adeò quidem inter ſe connexæ in punctis B, C, D, E, F, G, H; ut exiſtente omninò clauſo angulo ſub primis duabus Regulis comprehenſo XOZ, omnia illa puncta incidant in unum, idemque punctum A: ſed ita, ut, pro ut ille angulus aperitur, Regula BC, quæ ipſi XO normaliter puncto B eſt ſemper affixa, propellat verſus Z Regulam CD, quæ ſuper ZO incedendo efficiat cum illa ſemper angulos rectos. Et rurſus ut Regula CD propellat Regulam aliam DE, quæ verſùs X ſuper XO ita movetur, ut parallela ſemper maneat priori BC; atque ita etiam ut Regula DE propellat Regulã EF ipſi DC æquidiſtanter ſuper ZO incedentem; & ut EF propellat Regulam FG, hæcque denuò alteram GH, ſicque continuò in infinitum. Fig 55.

Hoc inſtrumento parato; palam eſt, quòd, dum aperitur angulus XOZ, & deſcribit interim punctum B lineam Curvam AB, quæ eſt Circuli Circumferentia, cum maneant ſemper æquales portiones AO, BO; reliqua puncta D, F, H, ubi ceterarum Regularum interſectiones fiunt, deſcribant eodem tempore Curvas alias AD, AF, AH, quæ Circulo, & ipſis ſectionibus Conicis magis, magiſque compoſitæ fiunt. Et quod attinet ad primam AD; ſi ponatur BO, ſive AO $= a$, CO $= x$; & DC $= y$; quia ſimilia ſunt triangula CBO, DCO, utpotè rectangula, & communem angulorum in O habentia, erit ut BO ad CO, ita CO ad DO: adeoque, cum propter triangulum rectangulum DCO, inveniatur

tur $DO = \sqrt{xx+yy}$, erit ut a ad x, ita x ad $\sqrt{xx+yy}$; ſive ut aa, ad xx, ita xx ad $xx+yy$: proindeque, factâ mutuâ mediorum, & extremorum multiplicatione erit $x^4 = a^2 x^2 + a^2 y^2$; æquatio, quæ primæ Curvæ poſitæ A D naturam nobis exprimet. Cum verò æquatio iſta ad quartam dimenſionem aſcendat, liquet, ipſam Curvam A D tertii generis eſſe.

Quod verò ſpectat ad ſecundam; retentâ adhùc AO, ſive $BO = a$, ponatur $EO = x$, & $EF = y$; & quoniam propter triangulum rectangulum F E O, invenietur $FO = \sqrt{xx+xy}$, ſi portò ponatur CO $= z$; quia ſimilia ſunt triangula B C O, E F O; BO eſt ad CO, ut EO ad FO, proindeque a eſt ad z, ut x, ad $\sqrt{xx+yy}$, ſive aa ad zz, ita xx ad $xx+yy$. Quare, factâ mutua mediorum, ac extremorum multiplicatione, elicietur æquatio $zz\,xx = aa\,xx + aa\,yy$. Jam vero, quia propter ſimilia triangula BCO, CDO, DEO; eſt EO quarta proportionalis in ordine duarum BO, CO; igitur, ſi fiat ut a ad z, ita z ad $\frac{zz}{a}$; & ut z ad $\frac{zz}{a}$, ita $\frac{zz}{a}$ ad $\frac{zzz}{aa}$; invenietur $EO = \frac{zzz}{aa}$. Erat autē eadem $EO = x$; proindeque erit $zzz = aax$, ſive $z = \sqrt[3]{aax}$; & conſequenter $zz = \sqrt[3]{a^4 xx}$.

Unde

Digitized by Google

Unde, ſi in æquatione ſuperiùs inventa $zz\ xx = aa\,xx + aa\,yy$; loco zz ſubſtituatur invetus ejus valor $\sqrt[3]{aaaaxx}$, nabebitur ſequens alia æquatio, xx

$\sqrt[3]{aaaaxx} = aaxx + aayy$; ſive $x^8 = aax^6 + 3aax^4yy + 3aaxxy^4 + aay^6$; quę ipſius Curvæ AF naturam commonſtrabit.

Nec diſſimiliter inveuetur æquatio exprimens naturam tertiæ Curve AH, nam retentâ ſemper AO, ſive BO $= a$; ſi ponatur GO $= x$, GH $= y$; propter triangulum rectangulum GHO, invenietur HO

$= \sqrt{xx + y^2}$; unde, ſi præterea ponatur CO $= z$, quia, propter triangula ſimilia CBO, HGO, eſt BO ad CO, ut GO ad HO, habebitur, ut ſupra, æquatio $zzxx = aaxx + aayy$. At verò propter ſimilitudinem triangulorum CBO, DCO, EDO, FEO, GFO; eſt GO, ſexta proportionalis in ordine duarum BO, CO. Igitur ſi fiat, ut a ad z, ita z ad tertiam; atque ita continuetur progreſſio, iuvenietur ſexta proporzionalis GO $= \frac{z^5}{a^4}$: & proinde, cum priùs eſſet eadem GO $= x$; erit $z^5 =$ a^4x; ſive $z = \sqrt[5]{a^4x}$, atque adeò $zz = \sqrt[5]{a^8xx}$. Unde in æquatione ſuperiùs adinventa; $zzxx = aaxx + aayy$; ponendo loco zz ipſius valorem $\sqrt[5]{a^8xx}$, invenietur loco illius, ſequens alia æquatio,

$xx\sqrt[5]{a^8xx}$, $= aaxx + aayy$; ſive $x^{12} = aax^{10} + 5aax^8yy + 10aax^6y^4 + 10aax^4y^6 + 5aaxxy^8 + aay^{10}$. Quæ eſt æquatio Curvæ quæſita.

Eadem ratione ceterarum aliarũ Curvarum, quæ ſuperiori Inſtrumento deſcribuntur, locales ordine æquationes invenientur: & ex iis, quæ modo tradidimus, quemadmodum etiam ex ipſa methodo, qua tales Curvarum æquationes eruuntur, facile cognoſci poteſt, ipſas Curvas Inſtrumento illo genitas ordine magis, magiſque compoſitas eſſe; quin etiam hanc compoſitionem ita in infinitum continuari, ut uniuſcujuſque Curvæ æquatio quatuor ſemper dimenſionibus excedat æquationem Curvæ proximè antecedentis. Advertendumque etiam, nos conſultò in inveniẽdis Curvarum æquationibus eliciendis poſuiſſe punctum O extrà Curvas ſitum pro Principio, ac Origine abſciſſarum ſuis ordinatis correſpondentium: quippe ſi pro illarum origine poneretur punctum A, quod in ipſis iis Curvis tanquàm vertex conſiderari poteſt, æquationes illarum Curvarum non nihilo intricatiores prodiiſſent.

Quod ut exemplo uno innoteſcat; proponatur æquatio invenienda prioris Curvæ AD, ſumpto puncto A pro principio, ſive origine abſciſſarum. Et jam ſi exiſtente adhuc BO, ſive AO $= a$; ponatur modò AC $= x$, & CD $= y$; erit tota CO $= a + x$. Et propter triangulum rectangulum DCO, invenietur DO $= \sqrt{yy + xx + 2ax + aa}$. Unde cùm ſimilia ſint triangula BCO, CDO; & propter hanc ſimi-

ſimilitudinem BO ſit ad CO, ut CO ad DO, erit ut a ad $a+x$, ita $a+x$ ad $\sqrt{yy+xx+2ax+aa}$; ſive demptis irrationabilibus; ut aa ad $aa+2ax+xx$, ita $aa+2ax+xx$ ad $yy+xx+2ax+aa$; vel etiam dividendo, ut aa ad $2ax+xx$, ita $aa+2ax+xx$ ad yy: proindeque factâ mutuâ mediorum, & extremorum multiplicatione, elicietur æquatio $x^4+4ax^3+5a^2x^2+2a^3x=a^2y^2$; quæ, ut videtur, eſt quidem longè magis intricata æquatione illa quam, ſuperiùs, faciendo punctum O originem abſciſſarum, deteximus.

Præterea Carteſius eodem loco citato aliud indicat Inſtrumentum, quo Curvæ lineæ concipi, & deſcribi poſſunt: ſcilicet, ſi planum CNKL moveatur ſurſum verſus in recta linea, ita ut ejus latus KL ſit in una, eademque recta linea KLA; & interim Regula GL circa punctum G rotata continuò ei ſic admoveatur, ut ſimul quoque tranſeat ſemper per punctum L: quippè cum Regula iſta continuò ſe ſe interſecet in punctis C cum latere plani CK, deſcribent puncta interſectionum perimetrum alicujus lineæ Curvæ: quæ alia ſubindè, atque alia erit, pro ut ipſum planum CNKL alia ſubinde, atque alia pollet figurâ. Fig. 56.

Ut ſi ponamus primò Planum rectilineum eſſe id, ut latus ejus CK ſit aliqua recta linea; ſumpto in recta KA puncto aliquo A pro origine, ſive linea abſciſſarum, quas in eadem AK accipimus; junctâque GA, ducatur ex puncto aliquo C ipſius Curvæ deſcriptæ recta CB ipſi GA parallela; quæ GB erit una ordinatarum abſciſſæ AB correſpondens. Tùm poſitis $GA=a$. $KL=b$; & LN eidem GA æqui-

æquidiſtanter ducta $= c$; ſi ponatur inſuper abſciſſa $BA = x$, & ordinata $BC = y$; quoniam ſimilia ſunt triangula NLK, CBK; NL eſt ad LK, ut CB ad BK. Proindeque faciendo, ut c ad b, ita y ad quartam; invenietur $BK = \frac{by}{c}$; atque adeò $BL = \frac{by}{c} - b$. Et $AL = x + \frac{by}{c} - b$. Quare, cum ſimilia ſint itidem triangula CBL, GAL; & propter hanc ſimilitudinem, CB eſt ad BL, ut GA, ad AL; erit ut y ad $\frac{by}{c} - b$, ita a ad $x + \frac{by}{c} - b$; ac proinde, factâ mediorum, & extremorum multiplicatione, producetur $\frac{aby}{c} - ab = xy + \frac{byy}{c} - by$; ſive $yy = cy - \frac{cxy}{b} + ay - ac$; quæ eſt æquatio GCE Curvæ deſcriptæ naturam deſignans; quam liquet hyperbolam eſſe aſymptoticam inter ſuas aſymptotos.

Cujus quidem loci conſtructio facilis eſt; nam ſi protrahatur AG uſque in D, ut ſit $DG =$ rectæ
Fig. 57. NL; & per punctum D agatur recta DF lateri CK parallela, quæ conveniat cum recta AB in puncto F; hyperbola, quæ deſcribetur ſecundum aſymptotos DF, AF, et tranſibit per datum punctum G, erit eadem illa, ad quam ſuperior æquatio refertur. Nam poſitis $AB = x$, $BC = y$, $AG = a$, & NL, ſive $DG = c$, & $LK = b$, erit tota $AD = a + c$. Jam verò ductâ IH ipſi BA parallelâ, quia ſimilia ſunt trian-

triangula KLN, IHD; & propter hanc ſimilitudinem KL eſt ad NL, ut IH, ſive BA ad DH; faciendo, ut b ad c ita x ad quartam, invenietur $DH = \frac{cx}{b}$, ac proinde erit reliqua AH, ſive $BI = a + c - \frac{cx}{b}$, & portio $CI = a + c - \frac{cx}{b} - y$. Eſt autem propter hyperbolæ naturam, rectangulum BCI = rectangulo AED, ſive etiam rectangulo AGD; quare erit $ay + cy - \frac{cxy}{b} - yy = ac$, ſive $yy = cy + ay - \frac{cxy}{b} - ac$; quæ eſt æquatio ſuperiùs inventa.

Quod ſi autem idem planum CNKL terminetur parabola plana KNC, cujus vertex ſit punctum K, & axis recta KA; deſcribetur Curva alia compoſitior. Nam, retentâ eadem denominatione; ideſt, $AB = x$. $BC = y$. $GA = a$. $NL = c$. Et $KL = b$. Quia propter naturam Parabolæ, eſt NL quadratum ad CB quadratum, ut LK ad BK; faciendo ut cc ad yy, ita b ad quartam; invenietur $BK = \frac{byy}{cc}$; Fig. 58.

& conſequenter $BL = \frac{byy}{cc} - b$; & $AL = \frac{byy}{cc} - b + x$. Unde cum ſimilia ſint triangula GAL, CBL; & propter hanc ſimilitudinem GA ſit ad AL, ut CB, ad BL; erit ut a ad $\frac{byy}{cc} - b + x$, ita y ad $\frac{byy}{cc} - b$; proindeque factâ mediorum, & ex-

tre-

tremorum multiplicatione, habebitur æquatio $\frac{by^3}{cc} - by + xy = \frac{aby^2}{cc} - ab$. Sive $y^3 - ccy + \frac{ccxy}{b} = ayy - acc$; quæ exprimet naturam Curvæ deſcriptæ; quæ eſt illa eadem, per quam Carteſius conſtructionem æquationum quinque, & ſex dimenſionum *Lib. 3. Geometriæ* ſubtiliter confecit.

Eadem ratione ſi planum CNKL Curvis aliis terminetur, aliæ, atque aliæ Curvæ lineæ procreabuntur, quæ magis magiſque compoſitæ erunt, pro ut ipſæ Curvæ, quibus planum terminari ſupponitur, compoſitæ aſſumuntur. Et ſpeciatim ſi planum Circulus erit centrum habens in puncto L, orietur Veterum Conchoides; cum maneant ſemper æquales portiones regulæ CL. Sed non diſſimulanda Carteſij ablepſia in tradenda Regula pro natura, & ortu harum Curvarum; quippè qui poſtquam lineas Curvas omnes ita in genera diſtinxerit, ut quodlibet genus duas ſemper dimenſiones ordine contineat; nempe ut dicantur primi generis, cum ipſarum æquationes dimenſionem ſecundam non excedunt; generis ſecundi cum eædem æquationes ad tertiam, vel quartam dimenſionem aſcendunt; generis tertii, quotieſcunque ad quintam, vel ſextam dimenſionem pertingunt; hanc regulam, quoad compoſitionem earum Curvarum, quæ altero iſto Inſtrumento deſcribuntur, ſubjungit; ſcilicet, ut Curva deſcripta ſit generis ſecundi, ſi ea, qua planum terminatur, ſit primi generis; & ut ſit generis tertii, ſi aſſumpta Curva linea ad genus ſecundum reducatur, atque ita in infinitum.

Hanc vero regulam fallacem eſſe, facile deprehendi poteſt ipſo eodem Calculo, quo Carteſius facile eſſe

Digitized by Google

eſſe dixit veritatem ſuæ Regulæ cognoſcere. Nam ſi ponamus $CNKL$ terminari ea Parabola Cubica, quæ eſt prioris ſpeciei, in qua nempè Cubus ordinatæ adæquat ſolidum ex quadrato Parametri in abſciſſam correſpondentem; & ſit punctum K vertex hujus parabolæ, & KA ejuſdem axis, aut diameter; retentâ ſemper eadem denominatione; quia propter naturam talis Parabolæ Cubus ordinatæ NL eſt ad Cubum ordinatæ CB, ut abſciſſa LK ad abſciſſam BK, faciendo ut c^3 ad y^3, ita b ad quartam, invenietur $BK = \frac{by^3}{c^3}$; atque adeò $BL = \frac{by^3}{c^3} - b$; & $AL = \frac{by^3}{c^3} - b + x$. Unde, cum ſimilia ſint triangula GAL, CBL, & propter hanc ſimilitudinem, GA ſit AL, ut CB ad BL, erit ut a ad $\frac{by^3}{c^3} - b + x$, ita y ad $\frac{by^3}{c^3} - b$; & proinde Curvæ æquatio fiat $\frac{by^4}{c^3} - by + xy = \frac{aby^3}{c^3} - ab$; ſive $y^4 - c^3 y + \frac{c^3 xy}{b} = ay^3 - ac^3$; quæ ad quatuor dimenſiones aſcendat; indicio eſt, Curvam deſcriptam eſſe ejuſdem generis ſecundi, ad quod refertur Parabola illa, qua planum ſupponitur terminari.

Fig. 59.

Digitized by Google

Denique Carteſius in fine Libri ſecundi Geometriæ quatuor Ovalium explicationem ſubjungit, quas ad Catoptricæ, & Dioptricæ Theoriam utiles is judicavit. Et quod quidem attinet ad primam; modus quo ea commode deſcribi poteſt, talis eſt. Sumantur in recta linea FG tria quævis puncta F, A, G, ita ut portiones AF, AG eam inter ſe habeant proportionem, quam volumus. Tum ex puncto F, tanquam centro, deſcripto Circulo quovis MN, cujus intervallum majus ſit, quàm FA, abſcindatur ex ipſa AG portio altera AO, quæ minor ſit, quàm AM in data quavis proportione; ac denique ex puncto G tamquàm centro, intervalloque GO deſcribatur Circulus alter ON; qui, cum ſecet priorem ab utraque parte lineæ AG in punctis N, erit utrumque ex numero eorum, per quæ Ovalis quæſita tranſire debet. Et, ſi porrò ex puncto F deſcribatur Circulus alter, qui pertranſeat aliquantulum ultra citrave punctum M, veluti per punctum P; ſumptâque AQ, quæ minor ſit, quàm AP in eadem illa ratione, qua AO minor aſſumpta fuit quàm AM; deſcribatur ex puncto G Circulus alter, qui tranſeat per punctum Q; interſectiones horum Circulorum dabunt alia duo puncta Ovalis quæſitæ. Atque eadem ratione cetera alia puncta invenientur.

Fig. 60.

Unde patet, primæ hujus Ovalis eam eſſe naturam, ut ſi in ejus perimetro ſumantur duo quævis puncta N, & R, & jungantur tàm rectæ FN, FR, quàm rectæ GN, GR, incrementa rectarum FN, FR ſuper recta FA ſint inter ſe ut decrementa rectarum GN, GR a recta GA. Nam ſi centro F deſcribantur Circuli NM, RP, & centro G deſcribantur Circuli alii NO, RQ, erunt AM, AP incrementa rectarum FN, FR ſuper recta FA; & AO, AQ decrementa rectarum GN, GR a recta GA. Sed per ejus deſcriptionem

nem A M eſt ad A O, ut A P ad A Q; igitur erit etiam, permutando, ut AM ad AP ita AO, ad AQ; proptereaque incrementa rectarum F N, F R ſuper recta F A eam inter ſe rationem habebunt, quam habent decrementa rectarum GN, GR a recta GA.

Quod verò ſpectat ad ſecundæ Ovalis deſcriptionem; ibi nulla quidem alia differentia occurrit, quàm quod portiones A O, A Q ipſis A M, A P proportionales, ſumi debeant ex altera parte puncti A; ita ut radii Circulorum, qui ex puncto G deſcribuntur ad eas ſecandas, quique ex centro F per puncta M, & P deſcripti ſunt, ſint æquales ipſi G A unà cum portionibus A O, A Q, uti ſubjectum Schema nobis id exhibet. Proindeque alterius hujus Ovalis ea erit natura; ut ſi ad duo quævis ipſius puncto N, & R ducantur tàm rectæ F N, F R, quàm rectæ G N, G R, incrementa ipſarum F N, F R ſuper recta F A ſint ſemper proportionalia incrementis aliarum G N, G R ſuper recta G A. Nam, deſcriptis tàm centro F Circulis M N, R P; quàm centro G Circulis N O, N Q, erunt A M, A P incrementa rectarum F N, F R ſuper recta FA; & A O, A Q incrementa rectarum G N, G R ſuper recta G A; atque adeò, cùm ſit ut A M ad A O, ita A P, ad A Q; erit etiam, permutando, ut A M ad A P, ita A O ad A Q; & conſequenter incrementa rectarum F N, F R ſuper recta F A, erunt inter ſe, ut incrementa rectarum GN, GR ſuper recta GA. Fig 61.

Porrò quod ſpectat ad tertiæ, & quartæ Ovalis deſcriptionem, ea non in alio differt a deſcriptione primæ, & ſecundæ, niſi quod punctum F (*eadem Figura*) ſumi debeat medium inter puncta G, & A; ita ut utrumque punctorum F, & G inter Ovales deſcribendas reperiatur; cum tamen in prima, & ſecunda ſolum punctum G exiſtat intra

 ipſas,

Fig.62. ipſas, & alterum F extra eaſdem, ſed in eadem linea AG poſitum maneat. Nam ceteroquin quantùm ad tertiam, deſcriptio eadem plane ratione perficienda eſt, ac in ſecunda; ſi deſcripto ex centro F Circulo quovis MN, cujus intervallum FM majus ſit quàm FA, deſcribatur ex puncto G Circulus alter ON, cujus intervallum GO majus quoque ſit, quàm GA; ſed ita tamen ut exceſſus AO minor ſit quàm AM in data quavis ratione. Quandoquidem puncta interſectionum N horum Circulorum erunt in Ovali quæſita. Et quantùm ad quartam, deſcriptio perfici debet eadem ratione, ac in prima: nempe, ſi deſcripto itidem ex centro F Circulo quovis

Fig.63 MN, cujus intervallum FM majus ſit, quàm FA; deſcribatur ex puncto G tamquam centro Circulus alter ON, cujus intervallum GO minus ſit quàm GA; ſed ita tamen ut defectus AO minor ſit quàm AF in data ſemper ratione; quia horum Circulorum interſectiones erunt in hac alia Ovali; atque ità porrò utriuſque Ovalis puncta alia invenientur.

Unde primò tertiæ Ovalis ea erit natura, ut ſumptis in ejus perimetro duobus punctis N, & R;

Fig.62. atque etiam ductis tàm rectis FN, GN, quàm rectis FR, GR, incrementa rectarum FN, FR ſuper recta FA ſint invicem, ut incrementa rectarum GN, GR ſuper recta GA. Nam per ejus deſcriptionem incrementa rectarum FN, GN ſuper rectis FA, GA ſunt invicem in data ratione, in qua ratione ſunt etiam incrementa rectarum FR, GR ſuper iiſdem rectis FA, GA: quare, ex æqua ratione, incrementa rectarum FN, GN ſuper rectis FA, GA proportionalia erunt incrementis rectarum FR, GR ſuper iiſdem rectis FA, GA: atque adeò, permutando, incrementa rectarum FN, FR ſuper recta FA ſunt invicem, ut incrementa rectarum GN, GR, ſuper recta GA.

Et

Et ſecundò quarta Ovalis eam habebit naturam; ut, ſumptis itidem in ea duobus punctis N, & R; ductiſque etiam tam rectis FN, GN, quàm rectis FR, G R; incrementa rectarum F N, F R ſuper recta FA proportionalia ſint decrementis rectarum G N, G R ſuper recta F A. Nam incrementum rectæ FN ſuper recta FA eſt, per ipſius deſcriptionem, ad decrementum rectæ GN à recta G A in data ratione, in qua ratione eſt etiam incrementum rectæ F R ſuper recta F A ad decrementum rectæ G R a recta G A; quare erit, ex æqua ratione; ut incrementum rectæ FN ſuper recta F A ad decrementum rectæ GN a recta G A; ita incrementum rectæ F R ſuper eadem recta FA ad decrementum rectæ GR ab eadem rectæ GA; atque adeò, permutando, incrementa rectarum FN, FR ſuper recta FA proportionalia erunt decrementis rectarum G N, G R a recta GA. Atque hæ ſunt quatuor Ovales Carteſii: quæ, etiamſi ejuſdem ferme naturæ videantur; tamen ſunt eæ quidem quatuor diverſorum generum; quorum unumquodque, uti idem Auctor advertit, infinita alia genera ſub ſe continet, & unumquodque rurſus tot diverſas ſpecies, quot efficit Ellipſium, aut Hyperbolarum genus. Etenim pro ut ratio inter lineas AM, AO, aliaſque conſiſtens diverſa eſt, genus quoque ſubalternum harum Ovalium fit diverſum. Deinde pro ut ratio inter lineas A F, AG mutatur, Ovales quoque cujuſque generis ſubalterni ſpecie mutantur: quæ etiam differre poſſent magnitudine, ſi ſcilicet, manente eadem proportione linearum AF, AG, aſſumantur eæ majores, vel minores. Nam ex harum linearum magnitudine, ceteris datis exiſtentibus, ipſa quoque Ovalium magnitudo dependet.

Fig 63.

Ceterum

Ceterum ipſe Carteſius monet, quòd, ſi ratio
Fig 60. linearum AM, AO fuerit æqualitatis, ita ut æqua-
les fuerit ipſæ rectæ AM, AO, loco Ovalium pri-
62. mi, & tertii generis, deſcribantur tantùm lineæ
rectæ: ſed loco ſecundi omnes Hyperbolæ; & loco
ultimi omnes Ellipſes. Nam in figuris primæ,
& tertiæ Ovalis exiſtentibus AM, AO æqualibus,
ipſa duo puncta M, & O in unum, idemque pun-
ctum incidant neceſſe eſt ipſius rectæ lineæ GF;
proindeque Circuli, qui deſcribuntur ex punctis F,
& G tamquam centris in illo unico puncto ſibi
invicem occurrent: atque idcirco per mutuum ipſo-
rum contactum ipſam rectam lineam AG deſcribent.
Fig 61. At vero in figuris ſecundæ, & quartæ Ovalis, exiſten-
te AO ipſi AM æquali; certo Circuli ex punctis F,
63. & G tanquam centris deſcripti ſe interſecant in
punctis N; ſed per hanc æqualitatem nil aliud no-
vi inducitur; niſi quòd in ſecunda Ovali differentia
rectarum FN, GN fiat æqualis differentiæ rectarum
FA, AG, quæ eſt proprietas umbilicorum Hyper-
bolæ; & in quarta Ovali ſumma earumdem rectarum
GN, FN ſit æqualis ſummæ rectarum FA, AG;
quæ eſt proprietas umbilicorum Ellipſis.

CAPUT

Digitized by Google

CAPUT VII.

Curvarum Geometricarum Exempla alia afferuntur.

ENarratis omnibus Curvis lineis, quæ a Carteſio in ſua Geometria indicantur; nunc Curvarum Geometricarum exempla alia afferamus. Omnes verò, quæ fingi, aut excogitari poſſunt, exponere operis eſſet infiniti. Et primo quidem occurrit Curva, quam affert Jacobus Ozanamus in ſua Geometria Practica, & quam Quadratricem vocat Geometricam, quòd ad Circuli quadraturam non parum ducit, licet ad Veterum Ciſſoidem quàm proximè accedat. Atque ejus ita quidem ortus efformatur. Si ſuper recta A B tamquam diametro deſcripto ſemicirculo A D B, ductâque per centrum C perpendiculari D C, agatur ex puncto B ad ejus circumferentiam recta quævis B E, ac ex puncto E demittatur perpendicularis altera E M, quæ extendatur uſque in N, ut ſit portio M N æqualis portioni CF, quam ducta recta linea BE abſcindit ex priori perpendiculari D C; ſique hæc operatio ſæpiùs iteretur, ut habeantur plures harum rectarum MN eodem ſemper modo determinatarum, prout ipſa Figura indicat; Curva A N N, quæ incipiens ex puncto A per earum extremitates tranſibit, quadratricem Geometricam Ozanamianam repræſentabit. Fig. 64.

Ex quo patet hujus Curvæ eam eſſe proprietatem, ut ipſi A B ducta quavis perpendiculari E N, occurrente tàm ſemicirculo, quàm Curvæ in punctis

ctis E, & N; rectangulum E M N ſub ordinatis Circuli, & ipſius Curvæ comprehenſum æquale ſit ſemper rectangulo C A M, quod ſit ex radio A C in abſciſſam utrique ordinatæ communem A M. Siquidem ductâ ex puncto B ad punctum E rectâ B E, quæ ipſi D C occurrat in puncto F; per geneſim hujus Curvæ erit ipſius ordinata M N æqualis abſciſſæ portioni C F. Modò propter ſimilitudinem triangulorum BCF, BME. CF, eſt ad BC, ſive CA, veluti M E ad BM: quare erit etiam ut MN ad C A, ita M E ad BM. Sed propter Circuli naturam, M E eſt ad BM, ut AM ad ME; igitur erit ex æqua ratione, ut A M ad M E, ita MN ad CA; proptereaque rectangulum ſub mediis E M N æquale erit rectangulo ſub extremis C A M.

Atque hinc etiam ſi alia ducatur recta linea GH ipſi AB perpendicularis, & tàm ſemicirculo, quàm Curvæ occurrens in punctis G, H; rectangulum EMN

Fig. 65. erit ad rectangulum G I H, ut A M ad A I. Quippè, cum rectangulum EMN æquale ſit rectangulo CAM, & rectangulum G I H æquale rectangulo C A I; erit ut rectangulum E M N ad rectangulum G I H, ita rectangulum C A M, ad rectangulum C A I. Sed propter communem altitudine AC, rectangulum CAM eſt ad rectangulum C A I, ut A M, ad A I; quare erit, ex æqua ratione, ut rectangulum EMN ad rectangulum G I H, ita A M, ad A I.

Unde facile quoque erit æquationem invenire, quæ naturam hujus Curvæ nobis manifeſtet; nempè relationem, quàm habeant abſciſſæ A M cum ſuis correſpondentibus ordinatis M N. Nam poſitâ A C $= a$, A M $= x$, & M N $= y$; erit per Circuli naturam E M $= \sqrt{2ax - xx}$. Unde, quia natura ipſius

Curvæ

Curvæ AN ſert, ut rectangulum EMN æquale ſit ſemper rectangulo CAM, erit $y\sqrt{2ax - xx} = ax$; ſive $2ayy - xyy = aax$, æquatio quęſita.

Exinde verò uberrima nobis ſubnaſcitur ratio Curvas lineas deſcribendi ſimul, & concipiendi, ſi circa diametrum AB deſcriptâ Curvâ quavis AEG, protrahantur ejus ordinatæ EM verſus N, ut rectangulum EMN ſit æquale ſemper rectangulo CAM; quod ſit ex recta linea conſtanti AC, quam Parametrum, ſive latus rectum nominare licet, in abſciſſam correſpondentem AM. Nam hoc pacto procreabitur Curva alia ANN, quæ alia ſubinde, atque alia erit, ut alia, atque alia aſſumitur Curvâ linea generatrix AEG. Sed poterunt omnes Curvæ lineæ tali pacto deſcriptę hac unica generali æquatione comprehendi $yz = ax$. Scilicet ſi poſitâ rectâ lineâ conſtanti AC $= a$; ponatur inſuper ordinata Curvæ generatricis EM $= z$, ordinata Curvæ genitæ MN $= y$, & abſciſſa utrique ordinatæ communis AM $= x$. Quippè, cum per naturam Curvæ genitæ rectangulum EMN adæquet perpetuò rectangulum CAM; erit ſemper $yz = ax$: proindeque, ut Curvæ genitæ propria æquatio inveniatur, ſatis erit valorem ordinatæ Curvæ generatricis per abſciſſam x expreſſum in generali illa æquatione dumtaxat ſubſtituere. Fig. 66.

Ut ſi ponatur primò, Curvam generatricem AEG eſſe hyperbolam æquilateram, cujus diameter tranſverſa ſit æqualis duplo ipſius AC; quia per naturam hujus hyperbolæ habetur $zz = 2ax + xx$; atque adeò $z = \sqrt{2ax + xx}$; poſito in æquatione

generali $yz = ax$, vice z hoc ipſius valore $\sqrt{2ax+xx}$, orietur $y\sqrt{2ax+xx} = ax$; ſive $2ayy+xyy = aax$. Et facile cognoſci ex ea poteſt, Curvam hanc genitam, quantùm ad ipſius naturam, non in alio differre ab ea, quam affert Jacobus Ozanamus, niſi quòd terminus xyy, qui hic afficitur ſigno $+$, in æquatione alterius ejus Curvæ reperiatur affectus ſigno $-$. Et ſciatur velim, quòd, quemadmodum Curva Ozanami ad quadraturam Circuli deducit, ita etiam hæc alia Curva genita quadraturam hyperbolæ continet: proindeque illam Quadratricem Circularem, hanc autem Quadratricem Hyperbolicam licet nuncupare.

Quòd ſi ponatur ſecundò, Curvam generantem AEG hac æquatione definiri [*ead. Fig.*] $zzz = 2axx + xxx$; ea erit hyperbola Cubica alterius ſpeciei, etiam æquilatera; in qua ſcilicet latus rectum adæquat latus tranſverſum. Et quoniam juxtà eam habetur $z = \sqrt[3]{2axx+xxx}$, poſita in æquatione generali $yz = ax$, vice z hoc ipſius valore $\sqrt[3]{2axx+xxx}$, habebitur $y\sqrt[3]{2axx+xxx} = ax$; ſive $2ayyy + y^3x = a^3x$ pro æquatione Curvæ genitæ ANN. Et ſi porrò Curva generatrix AEG definiatur hac alia æquatione $z^3 = 4axx + 4axx + x^3$, erit ea hyperbola Cubica prioris ſpeciei itidem æquilatera: cumque juxtà eam habeatur $z = \sqrt[3]{4aax+4axx+xxx}$; ſubſti-

ſubſtituto in æquatione generali $yz = ax$, vice z hoc ipſius valore $\sqrt[3]{4axx + 4axx + xxx}$; orietur loco illius, hæc alia æquatio $y\sqrt[3]{4aax + 4axx + xxx} = ax$, ſive $4aayyy + 4axyyy + xxyyy = aaaxx$; quæ naturam Curvæ genitæ A N deſignabit.

Sed animadverſione hoc loco dignum exiſtimo, quòd ſi Curva generatrix [*ead. Fig.*] A E G fuerit aliqua infinitarum Parabolarum ſuperiùs a nobis deſcriptarum, Curva genita ANN ſit etiam ſemper Parabola; & quidem ejuſdem generis cum Parabola generatrice, ſed tantùm ſpecie ab ea differens. Nam ſi ex. gr. ponatur, Curvam generatricem A E G eſſe Parabolam Cubicam prioris ſpeciei; ita ut, exiſtente etiam recta AC ipſius parametro, ſive latere recto, ſit localis ipſius æquatio $z^3 = aax$, habebitur $z = \sqrt[3]{aax}$: atque adeò æquatio generalis $yz = ax$ mutabitur in hanc aliam $y\sqrt[3]{aax} = ax$. Sive $yyy = axx$, quæ naturam Parabolæ Cubicæ alterius ſpeciei deſignat. Et ſi ipſa Curva generatrix fuerit altera iſta Parabola, ſitque localis ipſius æquatio $zzz = axx$, quia habetur $z = \sqrt[3]{axx}$, mutabitur eadem illa generalis æquatio $yz = ax$ in hanc aliam $y\sqrt[3]{axx} = ax$, ſive $y^3 = aax$, quæ naturam Parabolæ Cubicæ denotat prioris ſpeciei.

Advertatur quoque velim, quòd ſi Curva A E G, conjungatur iterum cum ſua diametro A B in aliquo ejus puncto B, adeò ut claudat cum ea ſpatium AE B A, prout ſequens indicat figura; & per punctum B ducatur recta B D ipſi M N parallela; quòd, inquam, recta iſta linea B D ſit aſymptotus Curvæ genitæ A N; nimirum ipſa Curva genita ſemper ad illam accedet; neque unquàm cum illa conveniet. Nam, cum natura Curvæ genitæ A N ſit ut rectangulum E M N adæquet ſemper rectangulum C A M; utique ordinata Curvæ generatricis erit ad abſciſſam A M, ut parameter A C ad ordinatam Curvæ genitæ M N: ſed in puncto B ordinata Curvæ generatricis E M omnino evaneſcit; atque ita infinities continetur in recta linea A B, ad quam pervenit abſciſſa A M; quare etiam recta linea A C continebitur infinities in ordinata correſpondenti Curvæ genitæ A N; proindeque ordinata ipſius Curvæ A N puncto B correſpondens infinitæ erit magnitudinis, atque adeò in infinita diſtantia lineæ Curvæ fiet occurrens.

Fig. 67.

Sed huic eidem methodo inſiſtendo, infinitos alios modus fingi poſſe Curvas lineas deſcribendi ſimul, & concipiendi, perſpicuum quidem eſt. Nam ex. gr. Si quemadmodum rectangulum E M N æquale conſtituitur rectangulo C A M, fiat idem rectangulum E M N æquale A M quadrato; Curva genita A N in quacumque Curvæ generatricis hypotheſi diverſa ſemper erit ab ea, quæ procreatur ſecundùm modum antecedentem: quippè ſi ponatur, causâ exempli, Curvam generatricem A E G hac æquatione definiri $zz = 2ax + xx$; quæ deſignat Hyperbolam eſſe æquilateram primi generis; quia habetur $z = \sqrt{2ax + xx}$, poſito in æquatione generali

Fig. 68

$zy = xx$, quæ exprimit naturam Curvæ genitæ in quacumque Curvæ generatricis hypotheſi, vice z ipſius valore $\sqrt{2ax + xx}$, habebitur $y\sqrt{2ax + xx} = xx$, ſeu $2ayy + xyy = x^3$; quæ eſt æquatio Curvæ ipſius genitæ propria longè diverſa ab ea, quam paulo ante ſecundùm modum antecedentem deteximus.

Occurrunt ſecundo loco Hyperbolæ Recentiorum conſideratæ ad ſimilitudinem ipſius Hyperbolæ Appollonianæ, ſed tamen pro ut inter aſymptotos illa jacet. Nam ex Elementis Conicis notum eſt, quòd, ſi intrà angulum BAC deſcribatur Curva aliqua N N talis naturæ, ut ductis ex punctis lateris A B rectis totidem M N ad ipſam Curvam N N, lateri alteri A C parallelis, ſint æqualia inter ſe rectangula omnia, quæ fiunt ex portionibus A M in rectas lineas correſpondentes M N; quòd, inquam, N N ſit eadem Hyberbola Apolloniana, quæ habet pro ſuis aſymptotis ipſa anguli lateri A B, A C. Et poſitâ A M $= x$, & M N $= y$, erit localis ejus æquatio, quando hoc pacto conſideretur, $xy = aa$; ſi omnia ea rectangula A M N æqualia ponantur quadrato, quod fit ex recta linea conſtanti a. Fig 69.

Jam verò, quemadmodum hujus Hyperbolæ ea eſt proprietas, ut unumquodque rectangulum, quod fit ex abſciſſa A M in ordinatam correſpondentem M N æquale ſit quadrato, quod fit ex data recta linea; ita Recentiores Hyperbolas alias in infinitum excogitarunt, in quibus non modo rectangulum ſub ipſis A M, M N comprehenſum adæquet quadratum datæ rectæ lineæ; ſed quodlibet productum, quod fit ex duabus quibuslibet poteſtatibus ipſarum A M, M N, adæquat homogeneam poteſtatem alterius conſtan- Fig. 70.

ſtantis rectæ lineæ. Atque, retentâ eadem denominatione, poterunt omnes illæ Hyperbolæ hac unica generali æquatione deſignari $x^m y^n = a^{m+n}$, ponendo litteram m pro exponente poteſtatis abſciſſæ x, litteram n pro exponente poteſtatis ordinatæ y, & $m+n$ pro exponente poteſtatis rectæ lineæ conſtantis.

Eæ autem Hyperbolæ tametſi variorum ſint generum, pro ut varia aſſumatur ſumma exponentium m, & n; cum dicantur primi generis, ſi ſumma illa binarium non excedat; generis ſecundi, ſi ad ternarium numerum aſcendat; atque ita deinceps; attamen, retento eodem genere, ſive eadem ſumma exponentium m, & n, Hyperbolæ illæ non ſemper ſpecie mutabuntur, pro ut ipſi illi Exponentes ſeorſim mutantur. Quandoquidem longe abeſt, ut hic locum habeat regula illa, quòd tot debeant eſſe ſpecies Hyperbolæ unius, ejuſdemque generis, quot modis abſciſſa x cum ordinata y complicari poteſt; ut productum habeatur homogeneum poteſtati, quæ fit ex recta linea conſtanti a. nam ex. gr. eadem Curva, ad quam refertur æquatio $xyy = aaa$, exprimi quoque poteſt hac alia æquatione $xxy = aaa$. Nec proindè duæ iſtæ æquationes $xyy = aaa$, & $xxy = aaa$ duas ſpecies Hyperbolarum ſecundi generis conſtituent.

Etenim, ſi, quemadmodum puncta ipſius Curvæ NN referuntur ad aſymptotum AB per rectas MN alteri AC parallelas, fiat, ut puncta eadem referantur ad aſymptotum alteram AC per rectas alias NO, quæ ipſi AB ſint æquidiſtantes; & ponatur ipſius Curvæ NN hanc eſſe proprietatem, ut ſolidum, quod fit ex abſciſſa AM in quadratum ordinatæ MN æquale ſit Cubo datæ rectæ lineæ; ita ut

Fig. 71.

ita ut, poſitis, ut ſuprà, abſciſsâ $AM = x$; ordinatâ $MN = y$, & datâ rectâ lineâ $= a$, ſit localis ipſius æquatio $xyy = aaa$; eadem Curva NN erit etiam locus alterius hujus æquationis $xxy = aaa$; ſi ſumantur pro abſciſſis portiones AO; & pro ordinatis rectæ NO. Etenim, poſitis $AO = x$, & $NO = y$, quia æquales ſunt tam rectæ AO, MN, quàm rectæ AM, NO; eadem Curvæ proprietas dabit hanc aliam æquationem $xxy = aaa$; proindeque perindè ac una eſt Hyperbola primi generis; ita etiam una eſt ſpecies Hyperbolarum ſecundi generis; ſed quæ ob diverſum reſpectum duplici exprimi poteſt æquatione.

Eadem ratione una etiam ſpecies eſt Hyperbolarum tertii generis. Nam, tametſi in hoc genere tres caſus diſtingui poſſint, quos tres ſequentes æquationes deſignant, $xy^3 = a^4$; $xxyy = a^4$; $x^3y = a^4$; attamen, quia ſecunda æquatio $xxyy = a^4$ extracta ex utraque ejus parte quadratâ radice, reducitur ad hanc aliam $xy = a^2$, quæ eſt localis æquatio Hyperbolarum primi generis; & quia eadem Curva, quæ ſatiſfacit primæ æquationi $xy^3 = a^4$, poteſt etiam ſatiſfacere tertiæ æquationi $x^3y = a^4$; licèt diverſo reſpectu; ſi ſcilicet abſciſſæ, quæ priùs ſumptæ erant in una aſymptoto AB, [*ead. Fig.*] nunc in aſympoto altera accipiantur AC; cum hoc pacto, quæ in primo caſu erant abſciſſæ, nunc evadant ordinatæ; & quæ illic erant ordinatæ, nunc evadant abſciſſæ; hinc eſt, ut non niſi unica conſtituenda ſit ſpecies Hyperbolarum generis tertii.

At verò genus quartum Hyperbolarum duas habet ſub ſe ſpecies. Nam, cum in hoc genere quatuor

tuor occurrant variationes, quas denotant quatuor ſequentes æquationes, $x y^4 = a^5$. $x x y^3 = a^5$. $x^3 y y = a^5$. $x^4 y = a^5$; una ſpecies erit earum Hyperbolarum, quæ definiuntur alterutrâ harum æquationum, $x y^4 = a^5$. $x^4 y = a^5$: & altera erit illarum Hyperbolarum, quæ una ex aliis duabus æquationibus $x x y^3 = a^5$. $x^3 y y = a^5$, deſignantur. Nam, quòd una, eademque Curva ſatisfaciat utrique harum æquationum $x y^4 = a^5$. $x^4 y = a^5$; perſpicuum quidem eſt: quandoquidem non in alio inter ſe differunt, niſi quòd in prima x ſit linearis; & y ad quartam dimenſionem aſcendat; cum tamen in ſecunda ſit viciſſim y linearis; & x ad quartum gradum elevetur: proindeque, ſi abſciſſæ, quæ in primo caſu ſumptæ erant ex. gr. in una aſymptoto AB, in ſecundo ſumantur in aſymptoto alia AC; quia lineæ, quæ in primo caſu erant abſciſſæ, in ſecundo evadunt ordinatæ; & viciſſim lineæ, quæ in primo erant ordinatæ, nunc fiunt abſciſſæ; eadem Curva linea utrique caſui ſatisfaciet. Et eadem ratione demonſtrabitur, eandem lineam Curvam poſſe ſatisfacere utrique aliarum harum æquationum $x^2 y^3 = a^5$. $x^3 y y = a^5$. Quandoquidem ipſarum eadem, ac antecedentium eſt ratio. Ex his autem facile erit aliarum generum ſpecies omnes definire. Quare ſupervacaneum exiſtimo circa hanc rem plura ſubjungere.

Quod verò attinet ad omnium harum Hyperbolarum deſcriptionem; ex methodo facili, & conſtanti, quæ in infinitum ſe extendat, deſcribi poſſunt. Nam primò quod ſpectat ad eas Hyperbolas, quæ primas

Digitized by Google

primas ſpecies omnium generum conſtituunt; quæque ideò ejuſmodi generali æquatione definiri poſſunt Fig. 72.
$x^m y = a^{m+1}$, vel etiam $x y^m = a^{m+1}$; methodus eas deſcribendi talis eſt. Sumatur in AB abſciſſa quævis AM, & ducatur ex puncto M recta MN alteri AC parallela, quæ ſi quidem ſit tertia proportionalis in ordine abſciſsæ AM, & alicujus rectæ lineæ conſtantis AD, erit punctum N in Hyperbola primi generis. Si verò ſit quarta proportionalis in ordine earumdem linearum AM, AD; erit in Hyperbola ſecundi generis: atque ita ſi fuerit ea ſucceſſivè in eadem progreſſione quinta, ſexta, & ſic deinceps proportionalis; reperietur ordine in omnibus primis ſpeciebus aliorum generum ſuperiorum.

Etenim poſitâ rectâ lineâ conſtanti $AD = a$, abſciſsâ $AM = x$; & ordinatâ $MN = y$; ſi quidem primò ordinata MN fuerit tertia proportionalis in ordine linearum AM, AD; erit ut x ad a, ita a ad y; proindeque facta mutua mediorum, ac extremorum multiplicatione, orietur æquatio $xy = aa$. quæ naturam primi generis Hyperbolarum deſignat. Sed ſi eadem ordinata MN fuerit quarta proportionalis relatè ad eaſdem AN, AD; erit ut x ad a, ita $\frac{aa}{x}$ ad y; atque adeò $xxy = aaa$, quæ naturam Hyperbolarum ſecundi generis denotat; atque ità porrò, ſi fuerit quinta proportionalis, erit ut x ad a, ita $\frac{aaa}{xx}$ ad y; ac proinde Curvæ æquatio erit $x^3 y = a^4$, quæ deſignat Hyperbolas omnes tertii generis: atque ità deinceps.

Poſſunt etiam hæ Hyperbolæ per infinitas Parabolas deſcribi, quæ ſint etiam primæ ſpeciei cujuſque generis; ſcilicet, ſi deſcriptâ circa rectam AB tanquam diametrum Parabolâ AP, quæ ſit ejuſdem generis cum Hyperbolâ deſcribendâ, ſed verò primæ ſpeciei; & cujus parameter ſit recta linea data AD; ſumptâque abſciſsâ quavis AM; cujus ordinata correſpondens in Parabola ſit recta PM; fiat ſemper ut ea abſciſsæ AM poteſtas, ad quam aſcendit in Parabola ordinata PM, ad ipſam ordinatæ PM poteſtatem, ita parameter AD ad quartam MN; nam erit punctum N in Hyperbola deſcribenda. Quandoquidem, retentâ eadem denominatione, erit per naturam Parabolæ, ut x^{m+1} ad $a^m x$, ita a ad y: atque ideò factâ, mutuâ mediorum, ac extremorum multiplicatione, erit $x^m y = a^{m+1}$; quæ eſt æquatio omnium Hyperbolarum deſcribendarum generalis. Sed licet concinna ejuſmodi deſcriptio; tamen ad praxim nimis intricata deprehenditur: neque digna planè eſt, ut cum priori comparetur.

Fig. 73.

Quod verò ſpectat ad deſcriptionem aliarum Hyperbolarum; poſſunt eæ omnes facilè deſcribi ope earum, quæ ad primas ſpecies generum omnium referuntur. Nam ſi deſcribenda ſit Hyperbola quarti generis, ad quam refertur æquatio $xxxyy = a^5$; deſcribatur prius methodo jam traditâ Hyperbola ejuſdem generis, ad quam refertur æquatio $x^4 z = a^5$. Et ſi eam repræſentet Curva linea OO, ita ut AM ſit ejus abſciſſa x, & OM ejuſdem ordinata z; protrahaturque OM, uſque ad N, ut ſit MN media proportionalis inter ipſas AM, OM, erit MN or-

Fig. 74.

Digitized by Google

ordinata y Hyperbolæ quæſitæ eidem abſciſſæ A M correſpondens. Etenim, cum Hyperbola O O definiatur ex hypotheſi hac æquatione $x^4 z = a^5$; erit $z = \frac{a^5}{x^4}$: proindeque, quia A M eſt ad M N, ut MN ad OM; ſive x ad y, uti y ad $\frac{a^5}{x^4}$; idcirco probè erit $yy = \frac{a^5}{x^3}$, ſive $xxxyy = a^5$; quæ eſt æquatio ad Hyperbolam quæſitam.

Nec diſſimiliter, ſi deſcribenda eſſet Hyperbola ſexti generis, quæ ſequenti æquatione definiatur $x^5 yy = a^7$; quoniam deſcriptâ Hyperbolâ O O (*ead. Fig.*) circà aſymptotos AB, AC, ita ut, poſitis AM $= x$, & OM $= z$, ſit localis ipſius æquatio $x^6 z = a^7$; fiet, ſi protrahatur ipſius ordinata OM uſque ad punctum N, ipſa M N media proportionalis inter ipſas A M, OM; erit eadem MN ordinata y Hyperbolæ quæſitæ correſpondens eidem abſciſſæ A M. Nam, cum ſit $x^6 z = a^7$, erit $z = \frac{a^7}{x^6}$; unde quia AM eſt ad MN, ut MN ad OM, erit ut x ad y, ita y ad $\frac{a^7}{x^6}$; proindeque erit $yy = \frac{a^7}{x^5}$; ſive $x^5 yy = a^7$. Quæ eſt æquatio Hyperbolæ deſcribendæ.

 De-

Denique, ut Curvarum Geometricarum exemplaalia proferamus, adducemus Curvas quàmplures, quæ ex Circulo ortum habent; & quæ uſui eſſe poſſunt, quòd facilè ſit eas deducere ad deſcriptionem.

Fig. 75. Concipiatur itaque Circulus ADBE, cujus centrum ſit C, & diameter recta AB. Tum ſumptâ in ipſa AB abſciſsâ quavis AM; repreſentet OM ordinatam ei in Circulo correſpondentem; ex qua abſcindatur portio MN, quæ ſit ad ipſam OM, ut eſt portio CM centro, & ordinatâ intercepta ad ſemidiametrum CA: & ſi idem fiat reſpectu cujuslibet abſciſſæ AM, ita ut habeantur plures harum portionum MN; pertraſibit per ipſarum extremitates Curva linea ANN; quæ per æquationem definitur $aayy = 2aaax - 5aaxx + 4axxx - x^4$, poſitis abſciſsâ $AM = x$, ordinatâ $MN = y$, & ſemidiametro $AC = a$. Etenim, cum juxta hanc denominationem ſit ordinata Circuli $MO = \sqrt{2ax - xx}$, & portio $CM = a - x$; vel etiam $= x - a$, erit per deſcriptionem hujus Curvæ, ut yy ad $2ax - xx$, ita $aa - 2ax + xx$ ad aa; atque idcirco $aayy = 2aaax - 5aaxx + 4axxx - x^4$.

Sed notetur velim, hujus Curvæ Figuram talem eſſe, qualem expoſitum exibet ſchema: nempe, ut conſtet duabus ex Ovalibus ſe invicem in centro C tangentibus; & quarum una tranſeat per extremitatem diametri A, & altera per extremitatem ejuſdem

Fig. 76 diametri B: quippè, cum abſciſſâ AM nulla ſit, nulla quoque erit ordinata Circuli MO; atque ideò nulla etiam ejus portio MN: proindeque, quia abſciſſa AM ſit nulla in vertice A, nulla erit ordinata Cur-

Curvæ puncto A correſpondens: & conſequenter per ipſum punctum A Curva tranſibit. At verò cum abſciſſa AM pertingit ad centrum C; quoniam evaneſcit portio CM, & per naturam Curvæ, CM eſt ad CA, ut MN ad MO; evaneſcet etiàm MN relatè ad MO; atque ideò tranſibit Curva per punctum C. Et denique, ſi abſciſſa AM pervenit ad B, quia tum ordinata Circuli MO evaneſcit, & ad nihilum redigitur; evaneſcet etiam ipſa Curvæ ordinata MN; & conſequenter Curva tranſibit per punctum B: quæ omnia ex ipſa æquatione perquamfacile deduci poſſunt. Nam in ea ſive abſciſſa $x = o$, ſive æqualis quantitati cognitæ a; ſive etiam $=$ quantitati cognitæ $2a$; ipſa ordinata y ſemper evaneſcit, & nihilo fit æqualis.

Jam verò, ſi iiſdem manentibus, fiat ut abſciſſa AM ad portionem centro, & ordinatâ interceptam CM, ita ordinata MO ad portionem MN; Curva, quæ tranſibit per extremitatem portionum MN, diverſæ erit naturæ. Nam poſitis, ut ſupra, $AM = x$, Fig. 77.

$MN = y$, $AC = a$; erit $MO = \sqrt{2ax - xx}$: et portio $CM = a - x$; vel etiam $= x - a$. Unde, quia, per hypotheſim, AM eſt ad CM, ut MO, ad MN, erit ut xx ad $aa - 2ax + xx$, ita $2ax - xx$ ad yy; atque ideò localis Curvæ æquatio erit $yyx = 2a^3 - 5aax + 4axx - x^3$.

Figura autem hujus Curvæ eadem eſt; quam hic repræſentamus: nempe primò erit ejus aſymptotus recta linea AD perverticem diametri A ſuis ordinatis æquidiſtanter ducta.

Secundò Curva tranſibit per centrum C, in quo conjungitur cum alia, quæ ſimili ratione ex parte alte-

altera deſcribitur: & denique utraque ſimul conſtituet Ovalem; quæ tranſibit per extremitatem alteram diametri B. Hæc omnia ex ipſa æquatione deduci poſſunt. Nam valor ordinatæ y evaneſcit, quotieſcumque abſciſſa x, ponatur æqualis tàm quantitati cognitæ a, quàm quantitati cognitæ, $2a$: & redditur idem valor ordinatæ y infinitus, quotieſcunque eadem abſciſſa x *zero* æqualis ſupponitur.

Verumtamen, quòd valor ordinatæ y evaneſcat in primo caſu facile uniſquiſque deprehendet ipſo calculo; cum, factâ ſubſtitutione utriuſque valoris abſciſſæ x, pars altera æquationis evaneſcat. Sed non eadem facilitate cognoſci poteſt; quòd in ſecundo caſu, cum ſcilicet abſciſſa x ponitur æqualis *zero*, idem valor ordinatæ y infinitus reddatur. Quamobrem, ne ullus hic ſcrupulus remaneat; placet rem paullò clarius oſtendere. Et quidem, cum Curvæ æquatio ſit $yyx = 2a^3 - 5aax + 4axx - x^3$; diviſâ utraque parte æquationis per abſciſſam x, erit $yy = \frac{2a^3}{x} - 5aa + 4ax - xx$. Atque ideò poſitâ eadem abſciſsâ $x = 0$, quia duo ultimi termini ſecundæ partis æquationis omninò evaneſcunt, cùm in uno quantitas cognita $4a$ ſit multiplicata per *zero*; & in altero reperiatur quadratum ipſius *zero*, erit eadem æquatio $yy = \frac{2aaa}{0} - 5aa$. At verò quantitas $\frac{2aaa}{0}$ eſt infinitæ magnitudinis, cum deſignet relationem, quam habet *zero* ad quantitatem finitam $2aaa$; quæ quidem infinita eſt, cum *zero* infinities contineatur in quantitate finita $2aaa$; proindeque erit etiam infinitæ magnitudinis quadratum ordinatæ y; atque ideò infinita quoque ipſa ordinata y. Q.E.D. Por-

Porrò, ſi, exiſtente eodem Circulo AOB, fiat ut ſubtenſa AO ad ordinatam OM, ita abſciſſa AM ad portionem MN; punctum N erit in alia Curva; cujus ſequens erit localis æquatio $2ayy = 2axx - xxx$, manentibus, ut ſuprà, abſciſsâ $AM = x$, ordinatâ $MN = y$, & radio $AC = a$. Quippe, cum ſubtenſa AO media ſit proportionalis inter diametrum AB, & portionem AM, erit $AO = \sqrt{2ax}$. Fig. 78.

Eſt autem, per naturam Circuli, $OM = \sqrt{2ax - xx}$; igitur, cum ſit, ex hypotheſi, ut AO ad OM, ita AM, ad MN; erit ut $2ax$ ad $2ax - xx$; ſive ut $2a$ ad $2a - x$; ita xx ad yy; atque ideò Curvæ æquatio erit, $2ayy = 2axx - xxx$. Et perſpicuum eſt, Curvam iſtam eſſe Ovalem, quæ per extremitates diametri AB tranſit. Nam in ipſa æquatione ſive abſciſſa x ponatur $= o$, ſive etiam $=$ quantitati cognitæ $2a$; ſemper valor ordinatæ y evaneſcet, & ad nihilum redigetur.

Denique, ſi in eodem Circulo fiat ut AM ad AC, ita OM ad MN, invenietur punctum N in alia itidem Curva; cujus natura per hanc æquationem definietur, $xyy = 2aaa - aax$; poſitis ſemper, ut ſuprà, $AM = x$; $MN = y$, & $AC = a$. Quippè, cum ſit per naturam Circuli, ipſa $AM = \sqrt{2ax - xx}$; & ex hypotheſi, AM ſit ad AC, ut OM ad MN; ſive etiam, permutando, ut AM ad OM, ita AC ad MN; erit ut xx ad $2ax - xx$; ſive ut x ad $2a - x$, ita aa ad yy; proindeque Curvæ æquatio erit $xyy = 2aaa - aax$. Et Figura hujus Curvæ erit eadem, quæ hic conſpicitur; nam habebit ut aſymptotum re- Fig. 79.

rectam lineam A D, ſuis ordinatis parallelam; & tranſibit per extremitatem alteram diametri A B; in qua conjungens ſe cum alia Curva, quæ in parte altera deſcribitur, Figurā cū ea Clypei repræſentabit.

Generationes quarundam Curvarum in Circulo exorientium per determinationem ad Circuli ipſiuſmet naturam ſpectantem inquiſivimus. Si Circulus aut in Ellipſim, aut in Hyperbolem pertranſeat, parva efficietur immutatio: & Curvæ genitæ natura nullo pacto varia erit. Nam erat ſupra [*pag.* 140. *Fig.* 75.] A O B Circulus, & Curva A N C generabatur per proportionem efficientem C M portionem interceptum centro, & ordinatā MO Circuli, ad ſemidiametrum CA Circuli, ut M N, quæ erat abſciſſa in ipſa eadem ordinata M O, ad ipſam ordinatam MO. Fiat eadem proportio: & ſit A O B (ibidem) perimeter Ellipſis, aut Hyperbolis. Erit M O $=$

$$\sqrt{\frac{cax \pm cxx.}{a}}$$ Si latus tranſverſum ſit quantitas a; & quantitas c latus rectum. Quare fiant quæ ibi præſtita ſunt, eadem omnino Curva prodibit.

Accipiatur modò æquatio generalis omnium Circulorum infinitè progredientium; erit ea, retentis iisdem ſignis, quæ ibidem ſunt; $y^{m+n} = x^m$ in $\overline{2a - x}^n$. Quare $y = \sqrt[m+n]{x^m \text{ in } \overline{2a - x}^n}$. Et

Fig. 80. M O fiat æqualis huic quantitati. Quare, inſtitutā proportione juxta dictam conditionem Curvæ generandæ, & efformatā æquatione, intelligetur confeſtim Curvæ genus inde promanans. Unum exemplum eſto.

Sit

Sit $m = 1$. et $n = 2$, erit $yyy = 4aax - 4axx + xxx$. Qui Circulus eſt cubicus prioris ſpeciei. Igitur erit $MO = \sqrt[3]{4aax - 4axx + xxx}$: & Curva generabitur per dictam conditionem; adhibitis modo y ad denominandas ejus abſciſſas, $x^6 - 7ax^5 + 19aax^4 - 25a^3x^3 + 13a^4xx - 4a^5x - a^3yyy = 0$. Et ita de reliquis.

Quòd ſi æquatio etiam generalis ſumatur Ellipſium, & Hyperbolarum omnium infinitè procedentium, $y^{m+n} = \frac{cx^m}{a}$ in $\overline{a \pm x}^n$; eædem quoque Curvæ generabuntur, quæ per Circulos infinitè procedentes creantur, poſitis conditionibus, quæ ſupra enunciatæ fuerunt: ſicuti id diximus de primo Circulo communi evenire.

Sed verò ſit A O perimeter lineæ rectæ in dato triangulo A C E; & quæratur Curva A N C eadem conditione genita; ita ut, accepto puncto quovis M in A C latere trianguli, & ductâ M N ordinatâ, ſeu parallelâ CE; ſit CM, (uti ſupra pag. 140.) ad CA; veluti MN ad O M. Dicantur A C $= a$. C E $= b$. Abſciſſæ A M $= x$. Et ordinatæ M N Curvæ quæſitæ $= y$. Erit C M $= a - x$. Et propter ſimilia triangula A C E, A M O; erit M O $= \frac{bx}{a}$. Sed per adpoſitam conditionem habetur; y. $\frac{bx}{a}$ :: $a - x$. a. Quare Curva genita erit Parabola Apolloniana. Fig. 80.

aay

$\frac{aay}{b} = ax - xx$. Cujus figura eſt, ut pertranſeat per A, & C puncta. Etenim cum A M (x) fit A C $= a$; abſciſſæ MN (y) evaneſcunt; nam tum in æquatione modò inventâ fiunt ipſæ $y = o$: Item evaneſcunt MN (y); quia tunc CM fit $= o$. Eſſe verò debet CM. CA :: MN. OM. Cùm verò ipſa eadem AM nulla eſt in A; profectò eſt quoque nulla ibi ipſa M N (y): quod per eamdem æquationem etiam cognoſcitur. Ergo per A, & C tranſit Curva.

Deſcribetur autem ſic; ideſt poſitio diametri, & quantitas paramerri ita determinabitur. Producatur AE ad B, ex parte A: & ſit in A B portio A B = dimidio A C $= \frac{a}{2}$. Ex B agatur BD ad quemvis angulum, ſed non parallelè A C. Et ſit in BD portio BD æqualis quartæ parti C E $= \frac{b}{4}$. Ex A agatur AGI parallela B D. Erit A G I diameter Curvæ. Cujus parameter $= \frac{aa}{b}$. Et ordinatæ parallelæ BA: & vertex A: origo verò abſciſſarum erit D. Demonſtratur. Nam accepto in D B puncto quovis F; ſi ex F ducatur F G Q parallela A B ſecans in G ipſam A G I, & Curvam in Q; ſi porrò agatur etiam ex D parallela D H ipſi eidem AB, occurrens in H cum A G I; dicanturque D F y; & F Q x; quia eſt GQ $=$ FQ $-$ FG $= x - \frac{a}{2}$; & A G $=$ HA $-$ HG, ſive $=$ D B $-$ D F $= \frac{b}{4} - y$; atque eſt G Q^2 $=$ A G in parametrum; erit quidem $xx - ax$

Fig. 81.

$$ax + \frac{aa}{4} = \frac{aa}{4} - \frac{aay}{b};\ \text{ſive}\ \frac{aay}{b} = ax - xx.$$

Quæ æquatio eſt inventa. Q. F. O.

Si verò rectam AC ſumere velis ex alia parte relate ad A; & ſit Ac; eodem modo aliam Parabolam Anc ejuſdem prorſus naturæ eo loci obtinebis, & deſcribere poteris, ſi illa maneant, quæ modò dicta ſunt. Etenim ſit in Ac abſciſſa Am; & ex m ordinata mo occurrens AE productæ in o. Erit Am $= -x$. & cA $= -a$. Quare cm ($=$ cA $-$ mA) erit $= -a + x$. Erit verò mo eadem ratione $= \frac{bx}{a}$. Nam AC. CE :: Am. mo. Sive $a.b :: -x. \frac{bx}{a}$ $-y$. Et per conditionem eſſe debet; $-y. \frac{bx}{a} ::$ $x - a. -a$. Et reliqua patent. Et AGI producta ad aliam partem dabit Ag diametrum parallelam bd, quæ ducta parallela eſt ipſi BD ex puncto b, uti facta eſt Ab $=$ AB. Et eadem erit parameter. Et bd $=$ BD $= \frac{b}{4}$. Et ordinatæ parallelæ Ab; & d origo abſciſſarum. Deſcribetur autem alia pars AP, ſeu Ap Parabolæ utriuſque eodem modo, ſi triangulum ACE, conſtituatur ex alia parte relate ad AC. Et AE producatur ex parte A: & Amo conſtituatur quoque ex parte alia relate ad Ac. Et cetera perficiantur, uti ſupra. Cum autem Triangulum generans infinitè extendi poſſit, liquet utramque Parabolam in infinitum extendi, productis ſemper pro alia parabola ipſis AC, AE ad Ac, Ao.

Tandem (*ead. Fig.*) ſi loco poſitæ proportionis $y . \frac{bx}{a} :: a - x . a$, ſumantur aliæ, atque aliæ rationes tertii, & quarti termini proportionis: & ſit eadem perimeter AE lineæ rectæ in triangulo ACE: ceteraque ponantur uti ſupra; aliæ etiam atquæ aliæ, novæque Curvæ ſemper generabuntur. Ita ſi fiat; $y . \frac{bx}{a} :: aa - 2ax + xx . aa$; Curva genita erit $x^3 - 2axx + aax = \frac{aaay}{b}$.

Quòd ſi tota proportio immutetur, ſed ſit idem Triangulum, & eadem perimeter AE; fiatque ut ſit AM. CM :: MO. MN. Et reliqua maneant, uti ſupra; & eadem denominatio quantitatum retineatur; habebitur $x . a - x :: \frac{bx}{a} . y$. Et linea ſolum recta exorietur. Verùm ſi imperetur, ut AM. CM :: $MO^2 . MN^2$; nimirùm $x . a - x :: \frac{bbxx}{aa} . yy$. Curva promanabit Ellipſis Apolloniana; cujus latus tranſverſum ipſamet AC; & latus rectum tertia proportionalis in ordine AC, & CE. Et reliqua erunt de hac Ellipſi dicenda, quæ dicta modo ſunt de Parabola, tum pro Curvæ deſcriptione; tum pro complemento Curvæ AP ex alia parte AC; cùm etiam tandem pro alia æquali Ellipſi, quæ ex alia parte relate ad A deſcribetur. Quòd ſi vero, iiſdem manentibus, fiat $x . a + x :: \frac{bbxx}{aa} . yy$; erit Hyperboles procreata AN extra Triangulum, ſeu perimetrum AE procedens; non quidem per C pertranſiens; ibi

Digitized by Google

ibi enim M N non ſit æqualis *zero*; ſed ejus quadratum duplo quadrato C E in eo puncto eſt æquale: verùm idem erit Hyperbolæ latus tranſverſum, idem latus rectum, quod fuit Ellipſis; & *A* vertex ejus; & AC diametri poſitio. Et reliqua uti in Ellipſi, & Parabola.

Sed ſi perimeter ipſa eadem A E ſit Parabolica; cujus parameter p; & ordinata ſit M O; abſciſſaque A M; & in diametro A D Parabolæ ſit A C ſumpta portio determinatæ quantitatis $= a$. Si modò quæratur Curva per proportionem genita, $AC. CM :: AM^2 . MN^2$; localis æquatio invenietur, retentâ eadem denominatione pro abſciſſis, & ordinatis, $\frac{apx - pxx}{a} = yy$; Fig.82.

habetur enim $a . a - x :: px . yy$. Quare Curva erit Ellipſis communis pertranſiens per puncta A, & C: & ejus latus tranſverſum eſt quidem ipſamet A C; parameter verò communis cum parametro Parabolæ. Quod ſi inſtituta proportio ſit $AC . AC + AM :: AM^2 . MN^2$; $a . a + x :: px . yy$. Hyperboles generabitur $\frac{apx + pxx}{a} = yy$, incedens extra AE perimetrum Parabolæ; cujus quidem vertex *A*; ſed non per *C* pertranſiens; nam in *C*, ubi *A*M [x] eſt *AC* (a), ſit quidem MN^2 [yy] $= 2pa$. Sed idem latus tranſverſum, & idem latus rectum erit, quod Ellipſis modò determinatum. Et *AC* diametri poſitio. Si verò, iiſdem manentibus, fiat in eadem Parabola, ut ſit proportio $OM . MN :: CA . CM$; uti ſupra in Circulo effectum fuit pag. 140.

pro-

progignetur Curva $\frac{aayy}{p} = aax - 2axx + xxx$.

ejuſdẽ generis, ſed non ſpeciei, cum Curva modo inventa pag.148. in perimetro AF lineæ rectæ Trianguli ACE; ſi fieret in ea perimetro MO . MN : : CM^2 . AC^2. Et Curva per puncta A, & C pertranſeat neceſſe eſt; uti ibidem.

Porrò eodem modo, ac de linea recta dictum eſt; aliæ, atque aliæ Curvæ, novæque generabuntur in Parabola Generatrice eadem, ſi termini proportionis immutentur; unde Curva promanat: vel immutatione illatâ ſolius dimenſionis in terminis duobus proportionis, ita ut vel ſimplex ſit dimenſio, vel ſecunda, ſeu quadrata, vel tertia, ſeu Cubica, & ita de reliquis; vel etiam immutatione inductâ naturæ totius proportionis. Exemp. gr. proportio *(ead. Fig.)* AC . CM :: MO . MN; unde Curva progignitur in Parabola ex dictis; immutata erit in ſola dimenſione duorum terminorum, ſi fiat AC . CM :: MO^2 . MN^2; vel :: MO^3 . MN^3. ; vel :: MO^4 . MN^4: & ita de reliquis: vel etiam MO. MN : : AC^2. CM^2; aut :: AC^3. CM^3; vel :: AC^4. CM^4: & ita de reliquis. Immutatio verò fiet naturæ totius proportionis; ſi ſit AC . CM :: MN . OM. Et termini duo hujus ejuſdemmet proportionis in ſola dimenſione poterunt quoque eodem modo, quo ſupra hic nuper effectum eſt, immutari. Quibus omnibus caſibus novæ ſemper Curvæ creabuntur. Quòd ſi immutentur Parabolæ generatrices, quarum omnium infinitè procedentium æquatio generalis, & communis eſt, acceptâ p pro parametro,

p^m

$p^m x^n = y^{m+n}$; novæ etiam juxta diverſas Parabolas enaſcentur Curvæ : & novæ etiam in unaquaque Parabola generatrice Curvæ comparabuntur, ſi modò dictæ immutationes adhibeantur. Atque etiam non modo in Parabola, & in linea recta generatricibus, ſed item & in Circulo, & in Ellipſi, & in Hyperbola generatricibus Curvarum, de quibus diximus, novæ ſemper progignentur Curvæ, ſi expoſitæ varietates adhibeantur, aut Curvæ generantis, aut proportionis, vel totius, vel duorum terminorum, per quam proportionem nova Curva inquiratur.

Sit Parabola AOG, cujus axis ABC, parameter $= a$. Sit verò ejus chorda AO. Et ex O ordinatim ad axim ſit poſita OM. Quæritur Curva AF, quæ pertranſit per puncta N; ſi ſint ſemper AO. OM : : AM. MN. Dicantur AM $= x$. MN $= y$. Erit $MO^2 = ax$ Et $AO^2 = xx + ax$; quare habebitur per conditionem, $xx+ax . ax :: x^2 . y^2$. Et localis Curvæ æquatio erit $axx = xyy + ayy$. Quod ſi, iiſdem poſitis, in ejuſdem Parabolę diametro ABC abſciſſa ſit data portio AB $= b$. Et Curva PEK quæratur pertranſiens per puncta P, ſi imperetur proportio AM. AB : : OM. MP; quę MP ſit y; Curva gignetur $abb = xyy$. Cujus figura eſt LDE. Nam MP(y) valorē habet infinitū in puncto A. Ibi enim AM (x) ſit $= o$. Ergo $aab = xyy$; ſive $\frac{aab}{x} = yy$, ſit $\frac{aab}{o} = yy$. Quare y habet in A valorem infinitum. Hinc Curva in A habet aſymptotum AQ parallellam ex A ductam ordinatis. Non verò per B permeabit; ibi enim tunc y non evaneſcit. Immò magis ejus quadratum ſit $= ab$. Quare Curva genita ſecans erit tum Parabolę generatricis in puncto D, ad quod ducta eſt ordinata BD ex ipſo eodē puncto B. Et hinc ulterius ea progreſſa intra perimetrum Parabolę incedere debet; nam antea extra ferebatur. Quod ipſamet proportio etiam indicat,

Fig. 83.

cat, per quam ea genita manet. Sed & nec axi ABC poteſt Curva ipſa uſpiam occurrere. Igitur AQ, AC ejus ſunt aſymptoti duę. Et quidem hyperboles ea eſt generis ſecundi; (ſupra pag.134. & 137.) cujus hyperbolis per datum punctum D pertranſeuntis non inelegans eſſe poſſet, quam modò poſuimus, deſcriptio.

Hæ duæ inſtitutæ proportiones, ſimiles ſunt duabus illis proportionibus, per quas ſupra *pag.*144. in Circulo generabatur Curva illa Ovalis, & Clypeoformis. Sed, retentâ eadem conditione chordę, immuta Curvam genitricem; immuta, ut libet, aut in ipſa eadem Parabola, & in Parabolis infinitis, aut in aliis ſingulis quibuſvis generantibus Curvis dimenſionem terminorum duorũ proportionis; immuta tandem totam proportionem, novæ ſemper Curvę generabuntur. Profectò hæc omnia poſtremo loco de generatione varia, & multiplicis generis Linearum Curvarum Geometricarum eum ob finem paullò fuſiùs diſputavimus; ut noſcatur quanta facilitate Curvæ Geometricæ mente intelligi poſſint; ac poſſint illarum comparari generationes. Ita quidem uberrima copia ſubnaſcitur harum Curvarum generandarum per ea, quæ tradidimus: & longè etiam ſimpliciores ejuſmodi viæ ſunt, quàm illæ, quas præbuit Inſtrumento ſuo Carteſius ſupra expoſito; quod & non ita facilè percipitur, quantùm ad operandi modum, & valdè operoſo indiget apparatu. Verùm eò Curvę aliquãdo ſimpliciores prodire ſolent; licèt localẽ æquationem habeant magis compoſitam, quò majores conditiones adponuntur problemati indeterminato, per quod Curva ipſa generatur. Exemplum unum proderit juvabit.

Sit data poſitione recta linea AQ, datumque in ea punctum A; lineam invenire, ad quam ductis ex A lineis AP, AO in angulo PAO dato, ac demiſſis ex punctis P, O lineę quæſitæ normalibus PM, OF ad AQ, eam ſecantibus in M, & F; ſit ratio AP, ad AO data, & tres AP, AO, AF, continuè proportionales. Ponatur jam factum eſſe, quod quæritur: & productis AP, AO ex parte A, acceptâque AD

Fig. 84.

datâ,

datâ in AP productâ, conſtituatur triangulum ADC rectangulum in D. Producta DC ſecet AQ in B. Et ex B demittatur normalis BH, ad AC. Sint dictæ AM $= x$; MP $= y$; & cognitæ AD $= a$; AC $= b$. CD $= c$; ratio verò data dicatur m, ad n. Eſt AM. MP :: AD. DB, ſeu x. y :: a. $\frac{ay}{x} =$ DB. Quare BC $=$ BD $-$ DC $= \frac{ay - bx}{x}$. Item eſt AC. CD :: BC. CH, ideſt b. c :: $\frac{ay-bx}{x}$. $\frac{cay - cbx}{bx} =$ CH. Et AH $= \frac{bbx + cay - cbx}{bx}$. Eſt autem bb major quàm cb in trianguli ADC lateribus: & fiat $bb - bc = gg$. Quare AH $= \frac{cay + ggx}{bx}$.

Modo eſt $AP^2 . AM^2 :: BA^2 . AD^2$. quæ in ſignis adpoſitis eſt; $xx + yy . xx :: BA^2 . aa$. Quare $BA^2 = \frac{aaxx + aayy}{xx}$. Porrò ob conditionem rationis datæ, eſt $AP^2 . AO^2 :: mm . nn$. Igitur $AO^2 = \frac{nnxx + nnyy}{mm}$. Atqui eſt; $BA^2 . AH^2 :: AO^2 . AF^2$.; ideſt in inventis valoribus; $\frac{aaxx + aayy}{xx} . \frac{\overline{cay + ggx}^2}{bbxx} :: \frac{nnxx + nnyy}{mm} . \frac{nn}{aammbb}$ in $\overline{cay + ggx}^2$. Igi-

tur $AF^2 = \frac{nn}{aammbb}$ in $\overline{cay+ggx}^2$. Et idcircô $AF = \frac{n}{amb}$ in $\overline{cay+ggx}$. Ob aliam verò conditionem, eſſe debet $\sqrt{xx+yy} . \sqrt{\frac{nnxx+nnyy}{mm}} :: \sqrt{\frac{nnxx+nnyy}{mm}} . \frac{ncay+nggx}{amb}$. Quare $\frac{nnxx+nnyy}{mm\sqrt{xx+yy}} = \frac{ncay+nggx}{amb}$. Et $\frac{n}{m}\sqrt{xx+yy} = \frac{cay+ggx}{ab}$. Atque æqualia etiam erunt quadrata; unde $\frac{nnxx+nnyy}{mm} = \frac{ccaayy}{aabb} + \frac{2caggxy+g^4xx}{aabb}$. Sive $\frac{nnxx}{mm} - \frac{g^4xx}{aabb} = \frac{ccyy}{bb} + \frac{2cggxy}{abb} - \frac{nnyy}{mm}$. Tres adpoſitæ ſunt conditiones anguli dati, rationis datæ, & proportionis continuæ. Et noſti quidem analyticum apparatum; quo in hac queſtione breviorem invenire nos analytice illam ſolvere volentes nequivimus. Attamen locus eſt ad lineam omnium ſimpliciſſimam; ideſt ad lineam rectam. Sive quantitates $\frac{nn}{mm} - \frac{g^4}{aabb}$, & $\frac{cc}{bb} - \frac{nn}{mm}$ ambæ ſint quantitates poſitivæ; ſive

ambæ

ambæ ſint quantitates negativæ; ſive alterutra earum ſit poſitiva, & altera negativa.

Etenim ſit alterutra earum poſitiva, ſitque $\frac{nn}{mm} - \frac{g^4}{aa\,bb}$. Et fiat $=\frac{f}{p}$. Altera verò ſit negativa, ideſt $\frac{cc}{bb} - \frac{nn}{mm}$; & fiat $= -\frac{e}{b}$. Erit æquatio; $\frac{fxx}{p} = \frac{2cggxy}{abb} - \frac{eyy}{b}$. Sive; $yy - \frac{2cggbxy}{eabb} + \frac{ccg^4bbxx}{eeaab^4} = \frac{ccbbg^4xx}{eeaab^4} - \frac{bfxx}{ep}$. Qui locus eſt ad lineam rectam; uti liquebit, extractâ utrimque quadratâ radice. Hinc facile intelligetur in aliis caſibus etiam locum eſſe ſemper ad lineam rectam. Angulus datus PAO in problemate poſitus eſt acutus: ſi rectus eſt locum non habet problema: ſi obtuſus, eodem modo, mutatis, quæ debent immutari, procedet reſolutio.

Noſti igitur plures adpoſitas fuiſſe conditiones; & problema, Lineamque extare ſimpliciſſimæ naturæ. Sit, iiſdem poſitis, quæſita Curva per puncta P pertranſiens [*ead. Fig.*] ex quibus, ductis PM normalibus ad AQ, ſint ſolùm AP, AM, & alia data recta q continuè ſemper proportionales: jam linea Curva erit longè compoſitior antecedenti; $x^4 = qqxx + qqyy$. Id autem erat quod exemplo declarare volebamus. Utile quoque erit aliis Curvis uti pro generatione novæ Curvæ, ut ſimplicior modus ſit generationis; & Curva obtineatur ſimplicior; veluti in nuper expoſitis generationibus Curvarum a nobis effectum fuit.

Digitized by Google

CAPUT VIII.

De Spirali Archimedea, & de aliis inſtar ipſius in infinitum efformatis.

NUnc aliud ingredimur Curvarum genus, quod ſcilicet Curvas Mechanicas, ſive Tranſcendentes, vel etiam Geometricè irrationales complectitur: quarum puncta omnia minimè talem habent relationem ad puncta alia alicujus rectæ lineæ poſitione datæ, quæ per æquationem aliquam finitam ad omnia illa puncta ſe ſe extendentem poſſit definiri; licèt eadem illa relatio poſſit per infinitam æquationem, quæ ſcilicet ad infinitas dimenſiones aſcendat, deſignari. Et in ejuſmodi quidem Curvis enumerandis eundem plane ordinem ſervabimus, quem in enumeratione Curvarum Geometricarum nobis propoſuimus. Nempè primò afferemus Curvas Mechanicas a Veteribus Geometris conſideratas; tùm deinceps eas ſubjungemus, quas Geometræ Recentiores meditati ſunt.

Inter lineas verò Mechanicas a Veteribus Geometris excogitatas maximè valet Spiralis Archimedea; cujus generatio ante ipſum quoque Archimedem ſequenti quidem ratione fuit a Geometris conſiderata. Intelligatur Rectæ lineæ extremum unum eſſe fixum, ac immobile; & extremum alterum motu æquabili in orbem cieri, donec redierit in idem punctum, unde incœperit moveri. Tum intelligatur eodem tempore motu etiam æquabili ab extremo ejuſdem lineæ fixo, & immobili ferri punctum alterum ſuper ipſa recta linea; quæ fertur in orbem;

ſed

ſed ita tamen, ut ad alterum ejuſdem lineæ extremum mobile eodem quoque tempore perveniat, quo extremum iſtud ad priſtinum ſuum locum redierit. Nam alterum hoc punctum per compoſitionem utriuſque motus tam ſcilicet lineæ, quæ in gyrum fertur, quàm ipſius puncti ſuper ipſa recta linea mobili delati, deſcribet lineam Curvam, quæ Spiralis nuncupatur. Unde Archimedes Spiralis geneſim tradens inquit, *ſi in plano Recta Linea, altero termino manente, æquali velocitate circumlata redeat deinceps eò, unde profecta eſt: ſimul verò cum linea circumlata feratur punctum pari velocitate ſibi ipſi ſecundùm rectam lineam ducto, motum initio ab immobili termino; iſtud punctum lineam Spiralem in plano deſcribet*.

Verumtamèn ut geneſis hujus Curvæ meliùs intelligatur, concipiatur Circulus BCDE, cujus centrum punctum *A*; ſitque *A*B ejus ſemidiameter, quæ in gyrum agatur ſecundùm extremum B deſcribens circumferentiam BCDEB, motu tamen æquabili; ita ut æqualibus temporibus æqualia quoque ſpatia percurrat: tum eodem tempore, quo extremum B moveri cœpit in gyrum, incipiat etiam moveri punctum aliud ſuper rectam *A*B ab extremo immobili A in extremum mobile B, motu itidem æquabili; ſed ita tamen, ut eodem tempore, quo alterum iſtud punctum pervenerit ad extremum mobile B, idem extremum *B* revolutione ſua redeat ad eundem locum, unde erat profectum; atque adeò ipſa ſemidiameter *AB* ad eandem poſitionem ſit reverſa; jam punctum illud delatum per rectam *A*B propter motum ſuum æquabilem ſubiens quoque motum ipſius rectæ A B itidem ex hypotheſi æquabilem, deſignabit utroque illo motu lineam Curvam *A*NB, quæ Spiralis dicitur: atque ejus origo ſive principium dicitur ab Archi- Fig. 85.

chimede manens punctum *A*; & Principium, ſive Origo circumlationis poſitio lineæ, a qua incipit ſemidiameter *A B* in gyrum ferri.

Ex ipſa autem geneſi hujus Curvæ liquet, hanc ejus eſſe proprietatem præcipuam, ut, ſi ex centro *A* ducatur ad circumferentiam recta linea *A* D, quæ ſecet deſcriptam Spiralem in puncto N; ut, inquam, integra Circuli circumferentia B C D E B ſit ad portionem ipſius BCD Principio circumlationis, & ductâ rectâ lineâ comprehenſam, ut eſt ſemidiameter A B, ſive *A* D ad portionem ipſius AN. Nam ſi integram circumferentiam diviſam intelligamus in centum partes æquales, & in totidem quoque partes diviſam intelligamus ſemidiametrum A B; eodem tempore, quo ipſa ſemidiameter *A*B percurrit partem unam peripheriæ, punctum delatum ex *A* in B percurret etiam partem unam ipſius *A*B; & ſimiliter eodem tempore, quo eadem ſemidiameter AB percurrit ex. gr. partes decem circumferentiæ, idem punctum delatum percurret quoque partes decem ejuſdem *A*B: proindeque integra circumferentia erit ſemper ad partem per ſemidiametrum percurſam, ut eſt ipſa ſemidiameter ad portionem ipſius, quæ ab eodem puncto ſuper ipſa delato percurritur. Unde, quia punctum delatum ex *A* in B portionem percurrit ſemidiametri *A*N eodem tempore, quo ipſa ſemidiameter percurrit portionem circumferentiæ B C D; conſequens eſt, ut integra circumferentia BCDEB ſit ad ipſius portionem B C D, veluti ſemidiameter *A*B, ſive A D, ad ipſius portionem *A*N.

Atque hinc plura quidem deducuntur: nempe primo, integram Circuli circumferentiam B C D E B
Fig 86 eſſe ad aliam ipſius portionem D E B, ut eſt ſemidiameter *A* B, ſive *A* D ad portionem alteram ipſius D N; nam, cum ſit ut integra Circuli circum-

cumferentia BCDEB ad portionem ipſius BCD, ita ſemidiameter AD ad portionem AN; erit etiam, dividendo, ut integra Circuli circumferenaia BCDEB ad portionem aliam DEB, ita ſemidiameter AD ad portionem alteram DN.

Secundò, quòd portio circumferentiæ BCD [*ead.Fig.*] ſit ad portionem aliam DEB, ut eſt portio ſemidiametri Centro, & Spirali contenta *A*N ad portionem alteram DN. Etenim eſt ut portio Circumferentiæ BCD ad integram circumferentiam BCDEB; ita portio ſemidiametri *A*N ad ipſam ſemidiametrum AD. Sed integra circumferentia BCDEB eſt ad portionem aliam DEB, ut ſemidiameter AD ad portionem DN; quare erit ex æqua ratione, ordinando, ut portio circumferentiæ BCD, ad portionem aliam DEB, ita portio ſemidiametri AN ad portionem alteram DN.

Tertio, quòd ſi ducatur radius alter AME, [*ead.Fig.*] qui ſecet Spiralem in puncto M; portio circumferentiæ BCD ad portionem aliam BCDE ſit ut eſt portio *A*N, ad portionem *A*M. Nam portio circumferentiæ BCD eſt ad integram circumferentiam BCDEB, ut eſt portio ſemidiametri *A*N ad ipſam ſemidiametrum *A*D. Sed integra circumferentia BCDEB eſt ad portionem ipſius BCDE, ut eſt ſemidiameter AD, ſive AE, ad portionem ipſius AM; igitur erit ex æqua ratione, ordinando, ut portio circumferentiæ BCD ad portionem aliam BCDE; ita portio ſemidiametri AN ad portionem alteram AM.

Quartò, quòd, iiſdem poſitis, portio circumferentiæ DEB, (*ead.Fig.*) ſit ad portionem aliam EB, ut eſt portio ſemidiametri DN ad portionem alteram EM. Siquidem portio circumferentiæ DEN eſt ad integram circumferentiam BCDEB; ut eſt portio ſemidiametri DN ad ſemidiametrum ipſam AD.

A D. Sed integra circumferentia BCDEB eſt ad portionem ipſius EB, ut eſt ſemidiameter AD, ſive AE ad portionem EM. Quare erit ex æqua ratione, ordinando, ut portio circumferentiæ DEB ad portionem aliam EB, ita portio ſemidiametri DN ad portionem alteram EM.

Quinto; quòd ſi integra Circuli circumferentia dividatur in quotcumque portiones æquales [*ead. Fig.*] BC, CD, DE, EB; & ad puncta ſectionum ducantur radii totidem AC, AD, AE, AB; occurrentes Spirali in punctis O, N, M, B; quòd, inquam, portiones horum radiorum AO, AN, AM, AB, centro, & Spirali comprehenſæ Arithmeticam proportionem conſtituant. Nam portio circumferentiæ BC eſt ad portionem BCD, ut AO, ad AN; & portio ſimiliter circumferentiæ BCD, eſt ad portionem BCDE, ut AN, ad AM; atque ita deinceps: quare portiones circumferentiæ BC, BCD, BCDE, BCDEB erunt inter ſe, ut portiones radiorum AO, AN, AM, A*B*; ac propterea, cum priores portiones ſit in Arithmetica proportione; erunt etiam portiones ſecundæ Arithmeticè proportionales.

Et ſexto denique, quòd, iiſdem poſitis, ſint etiam Arithmeticè proportionales portiones aliæ (*ead. Fig.*) radiorum CO, DN, EM, Circuli circumferentià, & Spirali comprehenſæ. Nam portio circumferentiæ CDE*B* eſt ad portionem aliam DE*B*, ut CO, ad DN; & ſimiliter portio circumferentiæ DE*B* eſt ad portionem aliam E*B*, ut DN, ad EM: quare portiones circumferentiæ CDE*B*, DE*B*, E*B* erunt inter ſe, ut portiones radiorum CO, DN, EM: proindeque, quia priores portiones ſunt Arithmeticè proportionales, erunt quoque portiones ſecundæ in Arithmetica proportione.

Ex

Ex quibus facile modo eſt Spiralem in plano per puncta deſcribere. Etenim, ſi Circuli cujuslibet circumferentia *B*CDE dividatur in partes quotcunque æquales, & ad ſingula puncta ſectionum ducantur radii totidem ex centro A; ſumptoque radio principali *AB*, dividatur idem in totidem quoque partes æquales, & transferantur partes illæ ordine ſuper aliis radiis ad puncta ſectionum ductis, pro ut ipſa indicat Figura; deſignabuntur in iis radiis totidem puncta, quæ erunt in Spirali deſcribenda. Patetque etiam, quòd, tametſi inveniri nequeat æquatio, quæ exprimat relationem, quam habent puncta omnia Spiralis ad puncta alia alicujus rectæ lineæ poſitione datæ; tamen poſſit optimè inveniri æquatio, quæ deſignet relationem, quam habent puncta omnia ejuſdem Spiralis ad puncta circumferentiæ Generatricis. Siquidem, poſitis integrâ circumferentiâ *BCDEB* $= a$; ſemidiametro A *B* $= c$; portione quavis circumferentiæ *B* C D $= x$; & portione ſemidiametri A N $= y$; quia per naturam Spiralis integra circumferentia *B* C D E *B* eſt ad ipſius portionem *B* C D; ut ſemidiameter A *B*, ſive A D ad ipſius portionem A N, erit ut a ad x, ita c ad y; ac propterea æquatio quæſita erit $cx = ay$. Fig. 87.

Sed hæc interim Spiralis prima dici poteſt; cum dari quoque poſſit ſecunda, tertia, quarta, & ſic in infinitum. Etenim ſi ſemidiameter A*B* extendatur verſus G, &, dum in gyrum circumfertur motu æquabili, exeat, ut priùs, ex extremo immobili A punctum, quod ſuper ipſa *AB* æquabili itidem motu feratur; & in prima ſemidiametri circumvolutione punctum iſtud reperiatur in *B*, Spiralis deſcripta A O N M *B* prima dicetur. Sed verò, ſi eadem tota producta ſemidiameter motu item æquabili adhùc in gyrum feratur; punctum verò illud pergat Fig. 88.

 ulte-

Digitized by Google

ulterius eadem, quâ antea, æquabilitate moveri; adeò ut in fine ſecundæ circumvolutionis reperiatur in puncto F, & percurrat partem BF, ipſi AB æqualem; Spiralis hac ſecundâ Circumvolutione deſcripta BONMF ſecunda vocabitur; atque ita dicetur Spiralis tertia; quæ deſcribitur tertiâ ejuſdem ſemidiametri Circumvolutione FONMG: ſicque deinceps.

Et notandum, quòd non modò Spirales hac ratione deſcriptæ dicuntur apud Archimedem, alioſque Geometras prima, ſecunda, tertia; prout primâ ſecundâ, aut tertiâ ſemidiametri Circumvolutione deſcribuntur; ſed etiam Circuli ipſi revolutionibus iis efformati ab ipſo numero revolutionum ſua nomina ſortiantur. Siquidem dicitur primus Circulus, qui prima ſemidiametri Circumvolutione formatur; cujuſmodi in eadem Figura eſt Circulus BCDE: dicitur ſecundus, qui per ſecundam Circumvolutionem generatur; cujuſmodi eſt Circulus FCDE; atque ita deinceps. Quin etiam ipſa ſpatia ſpiralia, quatenùs ſcilicet radio Vectore, & Spirali continentur, ſpecialibus nominibus prædita ſunt inſtar ipſarum ſpiralium. Nam dicitur ſpatium Spirale primum, quod comprehenditur radio AB, & prima Spirali AONMB; dicitur ſpatium Spirale ſecundum, quod portione radii BF, & ſecunda Spirali BONMF continetur: atque ita deinceps.

Quòd verò attinet ad proprietates aliarum harum Spiralium, hæ eedem ſunt planè cum iis, quas primæ Spirali convenire demonſtravimus. Etenim, cum in quacunque ſemidiametri Circumvolutione motus idem ſemper maneat, ac æquabilis; & eadem quoque æquabilitate incedat ſemper in unaquaque revolutione punctum, quod ſuper ipſa ſemidiametro fertur ab extremo immobili ad extremum mobile;

uti-

utique hæc proportio perpetuò locum habebit, quòd ita ſe habeat integra alicujus Circuli circumferentia ad ſuam ſemidiametrum, quemadmodum portio circumferentiæ per ſemidiametrum principalem percurſa ad portionem, quam eodem tempore ſuper ipſa ſemidiametro percurrit punctum illud, quod ab extremo ejus immobili ad extremum mobile fertur. Qua de re, ſi ducatur ex. gr. ad circumferentiam ſecundi Circuli radius quivis A D, (*ead. Fig.*) qui occurrat ſecundæ Spirali in puncto N, erit circumferentia primi Circuli B C D E B ad ſuam ſemidiametrum A B; uti eadem circumferentia unâ cum portione ſecundi F C D ad portionem radii centro, & ſecundâ Spirali contentam AN. Unde erit etiam, dividendo, ut circumferentia primi Circuli BCDEB ad ſuam ſemidiametrum AB, ita portio circumferentiæ ſecundi FCD ad portionem radii DN; quæ primo Circulo, & ſecundâ Spirali continetur.

Ceterum facile erit Spirales alias ad hujus ſimilitudinem in infinitum effingere. Nam, ſicuti ponit Archimedes, ut tam motus rectæ AB, quæ in orbem fertur, quàm motus puncti, quod per ipſam *A B* fertur ex A in *B* æquabilis ſit, adeò ut utroque motu æqualia ſpatia æqualibus temporibus percurrantur; ita meditari licet, ut vel alteruter eorum motuum; vel etiam ut uterque motus æquabilis non ſit, ſed juxta aliam quamvis rationem fiat. Hoc pacto palam eſt, Spiralis Archimedeæ proceſſum triplici quidem ratione in infinitum effingi poſſe; vel ſcilicet, ſi manente æquabili motu rectæ lineæ A*B* in orbem; ponatur variabilis juxta quamvis datam rationem motus puncti, quod ſuper ipſa *A B* fertur ex A in *B*; vel ſecundò ſi, manente æquabili motu puncti per rectam A *B* ex A in *B* delati, ponatur variabilis juxta quamvis datam rationem motus rectæ Fig.89.

lineæ *A B*, quæ fertur in orbem: vel denique tertiò ſi uterque motus variabilis ponatur; tàm ſcilicet motus rectæ lineæ *AB*, quæ in gyrum revolvitur, quàm motus puncti, quod ſuper ipſa *A B* ducitur ex A in *B*. Et manifeſtum eſt, quòd pro ut diverſa ponitur ratio, ſecundùm quam alteruter, vel uterque eorum motuum variatur; diverſæ itidem naturæ Spiralis, quæ deſcribitur, exoriatur.

Sed ut à Spiralibus, quæ prima ratione deſcribuntur, exordiamur; ab iis ſcilicet, quæ ortum ducunt à motu æquabili rectæ lineæ *AB*, quæ in orbem circumagitur; & à motu utcumque variabili puncti, quod ſuper ipſa A *B* fertur eodem tempore ex A in *B*: perſpicuum eſt, eas ad tria genera præcipua reduci poſſe. Vel ſcilicet ſi motus puncti ita variabilis ponatur, ut tempora lationum ſint ut poteſtates quævis ſpatiorum, quæ temporibus iis deſcribuntur; vel viciſſim ſi quævis temporum poteſtates ſint ut ſpatia deſcripta; vel denique ſi conjunctim, ut quævis temporum poteſtates ſint uti aliæ quævis poteſtates ſpatiorum, quæ temporibus illis percurruntur. Atque horum porro generum unumquodque infinitas alias ſpecies ſub ſe continere, evidens quidem eſt. Etenim pro ut diverſæ ponuntur poteſtates, ſive temporum, ſive ſpatiorum, diverſa ſemper erit Spiralis deſcriptæ ſpecies ſub genere eodem contenta.

Hac ratione Spirales primi generis poterunt omnes hac unica æquatione deſignari $b^m x = ay^m$: poſitis, ut ſupra (*ead. Fig.*) integrâ Circuli circumferentiâ *B C* D E *B* $= a$; ſemidiametro A*B* $= b$; portione quavis circumferentiæ *B* C D $= x$; portione ſemidiametri centro, & Spirali contentâ A N $= y$. Nam, cum punctum ſuper recta A *B* ita quidem in hoc genere ex A in *B* feratur, ut tempore latio-

tionum ſint ut poteſtates quævis ſpatiorum, quæ temporibus illis deſcribuntur; utique poteſtas portionis A N erit ad homogeneam poteſtatem totius ſemidiametri AB, ſive A D, ut tempus, quo percurritur portio AN, ad tempus, quo percurritur integra ſemidiameter AB. Sed, propter motum æquabilem ipſius AB, quæ fertur in orbem, & eodem tempore, quo punctum ex A in B, ut ſemper ſupponitur; tempus, quo percurritur portio A N eſt ad tempus, quo percurritur ſemidiameter tota AB; ut portio circumferentiæ BCD, ad circumferentiam integram $BCDEB$: quare, ex æqua ratione, ut poteſtas quævis portionis A N ad poteſtatem homogeneam totius ſemidiametri AB, ſive A D, ita portio circumferentiæ BCD, ad circumferentiam integram $BCDEB$. Unde, poſita littera m pro exponente poteſtatis portionis A N; erit ut y^m ad b^m, ita x, ad a: atque adeò æquatio erit $b^m x = a y^m$: quę quidem æquatio etſi generalis, reddetur tamen ſpecialis, determinando valorem exponentis m. Quippe ſi ponatur $m = 1$; æquatio erit $bx = ay$, quæ deſignat Spiralem Archimedeam. Dein ſi ponatur $m = 2$; æquatio erit $bbx = ayy$; quæ Spiralem aliam alterius ſpeciei deſignabit: atque ita deinceps.

Eadem ratione Spirales ſecundi generis poterunt omnes hac unica generali æquatione definiri $bx^n = a^n y$: manentibus, ut ſupra [*ead. Fig.*] integrâ circumferentiâ BCDEB $= a$; portione ejus BCD $= x$; ſemidiametro A B, ſive A D $= b$; portione ipſius A N $= y$. Etenim, cum in hoc ſecundo genere punctum ſuper ſemidiametro A B ita quidem ex A, in B feratur, ut ſpatia deſcripta ſint viciſſim, ut poteſtates quævis temporum, quibus ſpatia

illa

illa deſcribuntur; utique portio ſemidiametri A N erit ad ipſam ſemidiametrum AB, ſive AD, ut poteſtas quævis temporis, quo deſcribitur portio AN ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur ſemidiameter AB. Jam verò, propter motû æquabilem ipſius A B in orbem delatæ, poteſtas temporis, quo deſcribitur portio AN eſt ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur ſemidiameter integra AB; ut poteſtas ſimilis portionis circumferentiæ B C D ad poteſtatem homogeneam circumferentiæ integræ BCDEB: igitur erit, ex æqua ratione, ut portio ſemidiametri A N, ad ſemidiametrum ipſam AB; ita poteſtas quævis portionis circumferentiæ BCD ad poteſtatem homogeneam totius circumferentiæ *BCDEB*. Quare, poſitâ littera n pro exponente poteſtatis circumferentiæ portionis B C D, erit ut y ad B, ita x^n ad a^n; ac propterea æquatio erit $bx^n = a^n y$; quæ etſi generalis, reddetur tamen ſpecialis, determinando valorem exponentis n. Ponatur enim $n = 1$; æquatio erit $bx = ay$; quæ denotat Spiralem Archimedeam: ſi vero ponatur $n = 2$; æquatio eadem erit $bxx = ayy$; quæ ſpiralem aliam deſignat ab Archimedea diverſam: atque ita deinceps.

Nec diſſimiliter Spirales tertii generis poterunt omnes hac unica generali æquatione comprehendi $b^m x^n = a^n y^m$, retentis ſemper (*ead. Fig.*) circumferentiâ integrâ B C D E B $= a$; portione ejus B C D $= x$; ſemidiametro AB, ſive AD $= b$; & portione A N $= y$. Siquidem, cum in hoc tertio genere Spiralium punctum ſuper ſemidiametro A *B* ita quidem ex A in B feratur, ut quævis temporum poteſtates ſint ut aliæ quævis poteſtates ſpatiorum, quæ temporibus iis percurruntur; utique poteſtas

quęvis

quævis portionis ſemidiametri A N erit ad poteſtatem homogeneam totius ſemidiametri A B, ſive AD, ut alia quævis poteſtas temporis, quo percurritur portio ſemidiametri A N ad poteſtatem homogeneam temporis, quo percurritur ipſa ſemidiameter A B. Jam verò propter motum æquabilem rectæ lineæ *AB*, quæ fertur in orbem, poteſtas temporis, quo deſcribitur portio A N eſt ad poteſtatem homogeneam temporis, quo integra ſemidiameter A B deſcribitur, ut poteſtas ſimilis portionis circumferentiæ B C D ad poteſtatem homogeneam circumferentiæ integræ *BCDEB*; quare erit, ex æqua ratione, ut poteſtas quævis portionis ſemidiametri A N ad poteſtatem homogeneam integræ ſemidiametri A *B*; ita alia quævis poteſtas portionis circumferentiæ B C D ad poteſtatem homogeneam circumferentiæ integræ BCDE*B*. Quamobrem ſi dicatur m exponens poteſtatis portionis ſemidiametri A N, & n exponens poteſtatis portionis circumferentiæ BCD; erit ut y^m ad b^m, ita x^n ad a^n; atque adeo æquatio erit $b^m x^n = a^n y^m$; quæ tametſi ſit generalis, reddetur tamen ſpecialis, ſi, perinde ac in antecedentibus, determinetur valor tàm exponentis m, quàm exponentis n.

Adnotandum tamen, æquationem iſtam generalem $b^m x^n = a^n y^m$ Spirales omnes tertii generis deſignantem, poſſe quoque adplicari ad deſignandas Spirales omnes tàm generis primi, quam ſecundi; atque idcirco aliis præcedentibus æquationibus generaliorem eſſe. Etenim, ſi retento exponente m adhùc indeterminato, ponatur dumtaxàt $n = 1$; æquatio illa generalis mutabitur in iſtam $b^m x = a y^m$;

$a\, y^m$; quæ eſt æquatio generalis Spiralium omnium generis primi. Et ſi viciſſim retento exponente n adhùc indeterminato, ponatur $m = 1$, eadem illa generalis æquatio vertetur in hanc aliam $bx^n = a^n y$; quæ eſt æquatio generalis Spiralium omnium generis ſecundi. Et advertatur etiam, quòd Spirales iſtæ tertii generis non ſemper tales ſint, quales per æquationem exibentur; ita ut ad tot dimenſiones naturâ ſuâ eæ aſcendant, quot deſignat ſumma exponentium m, & n. Quippè aliquando, extractis ex utraque æquatione radicibus, poſſunt ad dimenſiones pauciores deprimi. Veluti ſi ponatur $m = 2$. $n = 4$; generalis illa æquatio evadet $bbx^4 = a^4 yy$. Quæ tamen, per extractionem radicis quadratæ ex utraque parte æquationis, reducetur ad hanc $bxx = aay$. Proindeque Spiralis, quæ primo adſpectu quatuor dimenſionum apparebat, naturâ ſuâ ad duas ſolùm aſcendit. Atque hoc pacto, ut vides, non ſolùm deprimitur ad dimenſiones pauciores, ſed etiam ex tertio genere fit generis ſecundi.

Nunc Spirales illas proſequemur, quæ ſecundâ ratione generari intelliguntur; ſcilicet ex motu æquabili puncti, quod ſuper ſemidiametro A B fertur ex A, in B; & ex motu utcunque variato ipſius ſemidiametri A B, quæ fertur in gyrum. Atque ejuſmodi quoque Spirales ad tria genera revocari poſſe, perſpicuum quidem eſt; etenim vel motus ſemidiametri A B, quæ fertur in orbem, ita ponitur variabilis, ut tempora lationum ſint, ut poteſtates quævis ſpatiorum, quæ temporibus iis deſcribuntur; & Spirales hoc pacto deſcriptæ erunt generis primi: vel idem motus ſemidiametri A B ita ponitur variabilis;

bilis; ut viciſſim quævis temporum poteſtates ſint, ut ſpatia temporibus iis deſcripta: & Spirales, quæ ita deſcribuntur, erunt generis ſecundi: vel denique motus ſemidiametri AB ita quidem ponitur variabilis; ut conjunctim quævis temporum poteſtates ſint ut aliæ quævis poteſtates ſpatiorum, quæ temporibus illis percurruntur; et quæ hac ratione deſcribuntur Spirales erunt generis tertii. Sed nihilominus quæ in hac claſſe ſunt generis primi, eædem ſunt cum iis, quæ in Claſſe antecedenti ſunt generis ſecundi; et quæ hic ſecundi ſunt generis, ejuſdem plane ſunt naturæ cum iis, quæ ibi erant generis primi; quæque verò in utraque Claſſe ſunt tertii generis, ejuſdem quoque naturæ deprehenduntur.

Nam primò quod attinet ad Spirales primi generis; quia in iis motus ſemidiametri AB, (*ead. Fig.*) quæ fertur in gyrum, ita ponitur variabilis, ut tempora lationum ſint, ut poteſtates quævis ſpatiorum, quæ iis temporibus deſcribuntur; utique poteſtas quævis portionis circumferentiæ BCD erit ad poteſtatem homogeneam circumferentiæ integræ BCDEB, ut tempus, quo deſcribitur portio circumferentiæ BCD, ad tempus, quo deſcribitur circumferentia integra BCDE*B*. Jam verò propter motum æquabilem puncti, quod ſuper ipſa A*B* fertur ex A in *B*, & eodem tempore, quo ipſa A*B* fertur in orbem; tempus, quo deſcribitur portio circumferentiæ *B*CD eſt ad tempus, quo deſcribitur circumferentia integra *B*CDEB, ut portio ſemidiametri AN, ad ſemidiametrum ipſam A*B*. Igitur erit, ex æqua ratione, ut poteſtas quævis portionis circumferentiæ *B*CD ad poteſtatem homogeneam circumferentiæ integræ BCDEB, ita portio ſemidiametri AN ad ſemidiametrum ipſam A*B*. Unde, retentâ eadem denominatione, ſcilicet circumferentiâ integrâ BCDEB $= a$;

 ſemi-

ſemidiametro AB $=b$; portione circumferentiæ BCD $=x$; & portione ſemidiametri AN $=y$; ſi porrò dicatur n exponens poteſtatis, ad quam aſcendit portio circumferentiæ BCD; erit ut x^n ad a^n, ita y ad b. Atque adeò æquatio erit $bx^n = a^n y$; eadem plane cum illa, quæ in Claſſe antecedenti Spirales omnes ſecundi generis repræſentabat.

Secundò quod ſpectat ad Spirales ſecundi generis; quoniam in iis motus ſemidiametri AB, [*ead. Fig.*] quæ fertur in orbem, ita ponitur variabilis, ut viciſſim quævis temporum poteſtates ſint ut ſpatia temporibus iis deſcripta: profectò portio circumferentiæ BCD erit ad circumferentiam integram BCDEB, ut poteſtas quævis temporis, quo deſcribitur portio circumferentiæ BCD, ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur circumferentia integra BCDEB; ſed propter motum æquabilem puncti, quod ſuper ipſa AB fertur ex A in B, poteſtas quævis temporis, quo deſcribitur portio circumferentiæ BCD eſt ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur circumferentia integra BCDEB, ut ſimilis poteſtas portionis ſemidiametri AN ad poteſtatem homogeneam ipſius ſemidiametri AB. Igitur erit, ex æqua ratione, ut portio circumferentiæ BCD ad circumferentiam integram BCDEB, ita poteſtas quævis portionis ſemidiametri AN ad poteſtatem homogeneam ipſius ſemidiametri AB: proindeque, retentâ eadem denominatione, ſi vocetur m exponens poteſtatis, ad quam aſcendit portio ſemidiametri AN; erit ut x ad a ita y^m ad b^m. Ac propterea æquatio erit $b^m x = a y^m$; eadem planè cum illa, quæ in Claſſe antecedenti Spirales omnes deſignat generis primi.

Tertio

Tertiò denique quod attinet ad Spirales tertii generis, quia in iis motus ſemidiametri AB, [*ead. Fig.*] quæ in gyrum revolvitur, ita ponitur variabilis, ut conjunctim poteſtates quævis ſpatiorũ ſint, ut aliæ quævis poteſtates temporum, quibus ſpatia illa deſcribuntur; utique poteſtas quævis portionis circumferentiæ BCD erit ad poteſtatem homogeneam circumferentiæ integræ BCDE*B*, ut alia quævis poteſtas temporis, quo deſcribitur portio circumferentiæ *B*CD ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur circumferentia integra BCDEB. Sed propter motum æquabilem puncti, quod ſuper ipſa ſemidiametro AB fertur ex A in B, poteſtas temporis, quo deſcribitur portio circumferentiæ BCD eſt ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur circumferentia integra BCDEB, ut ſimilis poteſtas portionis ſemidiametri AN ad poteſtatem homogeneam ipſius ſemidiametri *AB*. Igitur erit, ex æqua ratione, ut poteſtas quævis portionis circumferentiæ *B*CD ad poteſtatem homogeneam circumferentiæ integræ BCDEB, ita poteſtas quævis alia portionis ſemidiametri AN ad poteſtatem homogeneam ipſius ſemidiametri AB. Qua de re, manente eadem denominatione, ſi vocetur m exponens poteſtatis, ad quam aſcendit portio ſemidiametri AN, & n exponens poteſtatis, ad quam aſcendit portio circumferentiæ BCD; erit ut x^n ad a^n, ita y^m ad b^m: propterea æquatio erit $b^m x^n = a^n y^m$; eadem plane cum illa, quæ in claſſe antecedenti Spirales omnes tertii generis repræſentat.

Tandem Spirales illas conſiderabimus, quæ tertiâ quidem ratione generari intelliguntur, ſcilicet ex motu variabili tam ſemidiametri AB, quæ fertur in orbem, quàm puncti, quod ſuper ipſa ſemidiametro

 metro

metro A B fertur ex A in B [*ead. Fig.*]. Atque ejuſmodi Spirales ad novem genera præcipua reduci, perſpicuum eſt. Etenim, cum uterque motus triplici modo variari poſſit; primò, ſi nempe tempora lationum ſint ut poteſtates ſpatiorum, quæ temporibus iis deſcribuntur; ſecundò, ſi viciſſim poteſtates temporum ſint ut ſpatia temporibus iis deſcripta; tertiò ſi conjunctim poteſtates temporum ſint ut aliæ quævis poteſtates ſpatiorum, quæ temporibus illis percurruntur; palam eſt, unum motum cum alio novem modis diverſis poſſe combinari; atque ita ex diverſis hiſce combinationibus totidem alia genera Spiralium exſurgere. Sed nihilominùs poterunt omnia illa genera ad unicum reduci; atque omnes Spirales, quæ hac tertia ratione deſcribuntur, generali iſta æquatione comprehendi $b^m x^n = a^n y^m$. Ut hinc appareat, Spirales hujus tertiæ Claſſis eaſdem eſſe cum illis, quæ in utraque Claſſe antecedenti genus tertium conſtituunt.

Etenim, ſi uterque motus ita ponatur variabilis, ut poteſtates ſpatiorum ſint ut poteſtates aliæ temporum, quibus ſpatia illa deſcribuntur; quæ quidem hypotheſis comprehendit quoque alias duas, in quibus ſpatia, vel tempora ad nullam elevata poteſtatem ſupponuntur; erit primò ut poteſtas quævis portionis ſemidiametri A N (*ead. Fig.*) ad poteſtatem homogeneam ipſius ſemidiametri A B, ita alia quævis poteſtas temporis, quo deſcribitur portio ſemidiametri A N, ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur ipſa ſemidiameter A B. Et ſecundò ut poteſtas quævis portionis circumferentiæ B C D, ad poteſtatem homogeneam circumferentiæ integræ BCDEB ita alia quævis poteſtas temporis, quo deſcritur portio circumferentiæ BCD, ad poteſtatem homogeneam tem-

Digitized by Google

temporis, quo deſcribitur circumferentia integra BCDEB. Unde ſi, retentâ ſemper eadem denominatione, quam ſuperiùs adhibuimus, dicatur porro t tempus, quo deſcribitur tam portio ſemidiametri AN, quàm portio circumferentiæ BCD, & T tempus, quo deſcribitur tam ſemidiameter ipſa AB, quàm circumferentia integra, BCDEB; ac præterea p exponens poteſtatis, ad quam evehitur portio ſemidiametri AN, q exponens poteſtatis, ad quam aſcendit tempus t, quotieſcunque cum ipſa portione AN comparatur; r exponens poteſtatis, ad quam aſcendit portio circumferentiæ BCD; & $ſ$ exponens poteſtatis, ad quam aſcendit item tempus t, ubi confertur cum portione circumferentiæ BCD;

erit primò ut y^p ad b^p, ita t^q ad T^q: & ſecundò, ut x^r ad a^r, ita $x^ſ$ ad $T^ſ$. Sed ex prima proportionalitate eruitur, quòd t ſit ad T, ut $y^{\frac{p}{q}}$ ad $b^{\frac{p}{q}}$; & ex ſecunda, quòd x ſit ad T, ut $x^{\frac{r}{s}}$ ad $a^{\frac{r}{s}}$. Quare erit, ex æqua ratione, ut $y^{\frac{p}{q}}$ ad $b^{\frac{p}{q}}$, ita $x^{\frac{r}{s}}$ ad $a^{\frac{r}{s}}$; ſive etiam ut y^m ad b^m ita x^n ad a^n; ſi ponatur $\frac{p}{q} = m$; & $\frac{r}{s} = n$.

Atque adeò æquatio erit $b^m\ x^n = a^n\ y^m$.

CAPUT

CAPUT IX.

De Quadratrice Dinoſtrati, & Nicomedis, ac de ejus in infinitum Proceſſu.

Fig 90. SEquitur ſecunda Linea Mechanica ab antiquis excogitata, quæ Quadratrix, ſive Linea Quadrans dicta eſt; quòd ad Circuli quadraturam a Dinoſtrato, & Nicomede fuerit ſumpta. Ortum habet ejuſmodi. Exponatur Quadratum *ABCD*, in quo deſcribatur quadrans Circuli *BD*: & dum ſemidiameter A B fertur in orbem circa centrum A æquabili motu ex B in D; adeò ut æqualibus temporibus æqualia ſpatia percurrat ipſius Quadrantis *BD*; intelligatur intereà motu itidem æquabili, ſibiquemet ipſi parallelum ferri latus BC versùs latus oppoſitum AD, ſed ita tamen, ut, quo tempore ſemidiameter AB pervenit ad poſitionem AD, atque adeò integrum Quadrantem *BD* deſcribit, latus ipſum *BC* ad eandem poſitionem AD perveniat. Etenim, cum ſemidiameter in orbem acta per circumferentiam Quadrantis *BD* continuò ſe ſecet cum latere *BC* deorsùm prædicto modo lato, tranſibit per puncta interſectionum Linea Curva BNE, quæ erit *Quadratrix* Dinoſtrati, & Nicomedis.

Fig 91. Unde patet ejuſmodi Curvæ hanc eſſe proprietatem præcipuam, ut, ſi ducatur ad circumferentiam quadrantis BD ſemidiameter quævis AF, quæ ſecet deſcriptam Curvam in puncto N; & ex eo ducatur recta NM ipſi AB perpendicularis; atque adeò parallela lateri BC; ut, inquam, integra Quadrantis circumferentia *BFD* ſit ad portionem abſciſ-

ſam

ſam BF, ut eſt integra ſemidiameter AB ad portionem ejus BM, abſciſſam per perpendicularem NM. Nam, ſi integra Quadrantis circumferentia diviſa intelligatur in centum partes æquales; & in totidem quoque partes diviſam ponamus ſemidiametrum AB: profectò eodem temopore, quo ſemidiameter AB in orbem delata percurrit partem unam peripheriæ Quadrantis BFD, latus BC deorsùm ſibi ſemper æquidiſtanter delatum percurret etiam partem unam ipſius ejuſdem ſemidiametri *AB*: & ſimiliter eodem tempore, quo ſemidiameter AB percurrit ex. gr. partes decem circumferentiæ Quadrantis BFD, latus BC motu ſuo percurret quoque partes decem ſemidiametri AB: proindeque erit ſemper, ut integra Quadrantis circumferentia ad portionem per ſemidiametrum percurſam; ita ipſa ſemidiameter ad portionem ejus, quæ latere Quadrati eodem tempore percurritur. Unde, quia latus Quadrati BC percurrit in ſemidiametro *AB* portionem BM, tempore illo, quo ipſa ſemidiameter AB ad poſitionem AF pervenit; conſequitur, ut integra Quadrantis circumferentia BFD ſit ad portionem ejus BF, ut integra ſemidiameter AB ad portionem *BM*.

Atque hic plura quidem deducuntur. Nempè primò, quòd integra Quadrantis circumferentia BFD (*ead. Fig.*) ſit ad portionem alteram ipſius FD, veluti eſt eadem ſemidiameter *AB* ad portionem alteram ipſius AM. Nam, cum ſit ut integra Quadrantis circumferentia *BFD* ad portionem ipſius *BF*, ita integra ſemidiameter *AB* ad portionem ſemidiametri ipſius *BM*; erit etiàm, dividendo, ut integra Quadrantis circumferentia *BFD* ad portionem alteram FD; ita eadem ſemidiameter *AB* ad portionem aliam AM.

Secundo,

Secundò, quòd portio circumferentiæ Quadrantis BF (*ead. Fig.*) ſit ad portionem aliam FD, ut eſt portio ſemidiametri BM ad portionem aliam MA. Etenim, ut portio circumferentiæ BF ad circumferentiam integram Quadrantis BFD, ita portio ſemidiametri BM ad ſemidiametrum ipſam AB; ſed circumferentia integra Quadrantis BFD eſt ad portionem aliam ipſius FD, veluti eſt tota ſemidiameter AB ad ipſius portionem alteram AM. Quare erit, ex æqua ratione ordinando, ut portio circumferentiæ Quadrantis BF ad portionem alteram FD, ita portio ſemidiametri BM ad portionem alteram MA.

Fig.92.

Tertiò, quòd ſi ducatur radius alter AG, qui ſecet Quadratricem in puncto O; ex quo ſimiliter ducatur recta OR ipſi AB perpendicularis; quòd, inquam, portio circumferentiæ Quadrantis BF ſit ad portionem aliam BG, ut eſt portio ſemidiametri BM ad portionem aliam BR. Nam portio circumferentiæ BF eſt ad circumferentiam integram Quadrantis BFD, ut eſt portio ſemidiametri BM ad ſemidiametrum ipſam AB. Jam verò circumferentia integra Quadrantis BFD eſt ad portionem aliam BG, ut ſemidiameter AB ad portionem aliam BR; quare erit, ex æqua ratione ordinando, ut portio circumferentiæ BF ad portionem alteram BG, ita portio ſemidiametri BM ad portionem aliam BR.

Quartò, quòd, iiſdem poſitis, portio circumferentiæ FD (*ead. Fig.*) ſit ad portionem aliam GD, ut portio ſemidiametri AM ad portionem alteram AR. Eſt enim ut portio circumferentiæ FD ad circumferentiam integram Quadrantis BFD, ita portio ſemidiametri AN ad ſemidiametrum AB. Sed circumferentia integra Quadrantis BFD eſt ad portionem ipſius GD, ut ſemidiameter AB ad ejus portio-

tionem A R, igitur erit, ex æqua ratione ordinando, ut portio circumferentiæ F D ad portionem aliam G D, ita portio ſemidiametri A M ad portionem aliam A R..

Quintò demùm, quòd ſi integra Quadrantis circumferentia dividatur in quotcumque partes æquales *B* F, F G, G H, H D; & ad puncta ſectionum ducantur radii A F, A G, A H, ſecantes deſcriptam Quadratricem in punctis N, O, P, ex quibus demittantur ad ſemidiametrum A *B* perpendiculares N M, O R, P Q; quòd, inquam, portiones ſemidiametri per perpendiculares illas abſciſſæ B M, *B*R, BQ, BA, ſint in arithmetica progreſſione. Nam portio circumferentiæ B F eſt ad portionem BG, ut portio ſemidiametri *B* M ad portionem B R. Et ſimiliter portio circumferentie B G eſt ad portionem *B* H, veluti portio ſemidiametri B R ad portionem BQ. Quare portiones circumferentiæ BF, BG, *B*H, *B* D, erunt inter ſe, ut portiones ſemidiametri BM, B R, B *Q*, B A. Atque adeò cum primæ portiones progreſſionem arithmeticam conſtituant; erunt etiam ſecundæ in arithmetica progreſſione. Item, dividendo, æquales erunt portiones ſemidiametri B M, M R, R Q, *Q* A. Fig.93.

Per quæ facile modò eſt Quadratricem in plano per puncta deſcribere. Etenim, ſi Quadrantis circumferentia B D dividatur in plures partes æquales; & in totidem partes æquales dividatur etiam ſemidiameter A B; ac porrò ad puncta ſectionum circumferentiæ ducantur radii totidem; atque ex punctis ſectionum diametri excitentur totidem quoque perpendiculares; quia hæ perpendiculares ſe interſecant cum illis radiis in totidem aliis punctis, uti Schema repræſentat, erunt omnia illa puncta in Quadratrice deſcribenda: ita ut quô major eſt numerus partium Fig 94.

 æqua-

æqualium, in quas dividitur tàm integra Quadrantis circumferentia BD, quàm ſemidiameter ipſa AB; eò pariter major eſt numerus punctorum, quæ habentur pro Quadrarice deſcribenda. Et perſpicuum eſt, quòd, tametſi nequeat inveniri æquatio, quæ exprimat nobis relationem, quam habent puncta omnia Quadratricis B E ad puncta alia alicujus rectæ lineæ poſitione datæ, uti AB, vel AE; tamen poſſit optime inveniri æquatio, quæ deſignet relationem, quam habent puncta omnia ejuſdem Quadratricis ad puncta ipſa circumferentiæ Quadrantis. Siquidem, poſitis, uti ſupra, integrâ circumferentiâ $BD = a$; porti ne quavis ejus $BF = x$; poſitis inſuper integrâ ſemidiametro $AB = b$; & portione ejus $BM = y$; quia per naturam Quadratricis integra Quadrantis circumferentia BD eſt ad portionem ejus BF, ut integra ſemidiameter AB ad portionem BM; erit a ad x; ita b, ad y: atque adeò æquatio erit $ay = bx$.

Sed aliam habet Curva iſta proprietatem, propter quam Quadratricis nomen ſortita eſt, ſcilicet quòd ſemidiameter AB media ſit proportionalis inter baſim Quadratricis AE, & Quadrantis circumferentiam BD. Etenim, ſi ſumatur in ipſa Quadrantis circumferentia BD arcus DH indefinitè parvus, & ad punctum H ducatur radius AH ſecans Quadratricem in puncto P, erit etiam intercepta portio Quadratricis PE indefinitè parva; & proinde tanquàm æquales conſiderari poterunt rectæ lineæ AP, AE; atque ideò mixtilineum APE veluti Circuli ſector ſpectari, cujus ſemidiameter ſit AP, vel AE. Jam verò propter ſimilitudinem ſectorum APE, AHD, baſis Quadratricis AE eſt ad ſemidiametrum AD, ut portio Quadratricis PE ad arcum DH; igitur, cùm, ductâ PQ ipſi AB perpendiculari, portio Quadratricis PE ſumi poſſit æqualis portioni ſemidia-

Fig. 95.

midiametri AQ, erit etiam ut AE, ad AD, ita AQ, ad DH. Eſt verò ut AQ, ad DH, ita AB, ad BD; quare erit, ex æqua ratione, ut AE, ad AD, ita AB, ad BD; ptoptereà ſemidiameter AB media erit proportionalis inter baſim Quadratricis AE, & Quadrantis circumferentiam BD.

Atque hinc, ſi punctum Quadratricis E (*ead.Fig.*) poſſit determinari, facile foret tàm rectam lineam invenire, quæ ſit æqualis circumferentiæ Circuli, quàm quadratum exponere, cui ſit æquale ſpatium Circulare. Nam, quod ad primum attinet, perſpicuum eſt, id facile obtineri, ſi fiat, ut Baſis Quadratricis AE ad ſemidiametrum AD, ita eadem ſemidiameter AD ad quartam rectam lineam X. Quippè cum ſit etiàm ut AE ad AD, ita AD ad BD, erit recta linea X æqualis longitudini circumferentiæ Quadrantis BD. Et quod ſpectat ad ſecundum; quia area totius Quadrantis ABD ſit per multiplicationem circumferentiæ BD in dimidium ſemidiametri AB; invenietur quadratum, cui ſi æqualis area Quadrantis ABD; ſi fiat, ut recta linea Z ſit media proportionalis inter rectam lineam X, & dimidium ſemediametri AB. Etenim, cum recta linea X ſit æqualis circumferentiæ Quadrantis BD, erit eadem recta linea Z media proportionalis inter circumferentiam Quadrantis BD, & dimidium ejuſdem ſemidiametri AB; proindeque erit quadratum ipſius Z æquale areæ, ſive ſpatio totius Quadrantis ABD.

Verumtamèn, quia punctum Quadratricis E non alia ratione poteſt determinari, niſi per approximationem; cùm in ea nulla fiat linearum interſectio; eò quòd eodem tempore, quo ſemidameter AB pervenit ad poſitionem AD, latus quadrati BC ad eandem poſitionem pertingit; nec idcircò ſe ſe invicem interſecant, ſed tantùm una linea ſuper altera ja-

ceat; hinc eſt, ut utrumque problema [quod in unum incidit] & rectificationis circumferentiæ Circuli, & Quadraturæ ſpatii Circularis ab eadẽ circumferentia comprehenſi, ope ipſius Quadratricis ſolvi nequeat exacte; ſed tamen per approximationem; ſive ſtatuendo limites, quibus valor quantitatis quæſitæ continetur. Atque hic locus eſſet opportunus, ut ea in medium proferremus, quæ ſuper hoc celebri problemate de Quadratura Circuli conſiderarunt hactenus Geometræ. Sed quoniam id longiùs nos duceret, quàm noſter eſt animus, cùm res digna ſit, quæ ferè integro, juſtoque libello pertractetur; liberiùs ab hoc opere abſtinemus; atque rem apud alios auctores, ſi fortè voluntas erit, licebit cognoſcere.

Hæc igitur eſt veterum Curva linea, quæ Quadratrix, ſive linea Quadrans dicitur. Reſtat modò, ut ejuſdem in infinitum proceſſum expendamus; ſcilicet quo pacto Curvæ aliæ ad ejus ſimilitudinem in infinitum effingi poſſunt. Et ſane, cùm ejuſmodi Curva linea ex duplici motu ſuam habeat originem; ſcilicet, ex motu ſemidiametri, quæ fertur in orbem æquabiliter per circumferentiam Quadrantis, & ex motu itidem æquabili lateris Quadrati, quod deorſum fertur ſibimetipſi ſemper parallelum; ſed ita tamen ut uterque motus eodem tempore abſolvatur; adeò ut tàm ſemidiameter, quàm latus Quadrati ad eandem poſitionem perveniat; perſpicuum eſt, proceſſum alterius hujus Curvæ Veterum non aliter fieri poſſe; quàm inſtar proceſsûs Spiralis: ſcilicet vel ſi eorum motuum alteruter, vel ſi etiam uterque motus juxtà quamvis datam rationem variabilis ſupponatur. Hac ratione triplex quoque erit Claſſis Quadratricum; quæ exinde oriuntur. Nam prima eas continebit, quæ formantur motu æquabili ſemidiametri, & motu utcumque variabili lateris quadrati.

drati.

drati. Seunda Claſſis comprehendet Quadratrices illas, quæ generari intelliguntur ex motu æquabili lateris quadrati, & ex motu juxta quamvis datam rationem variabili ſemidiametri. Ac tertia demùm erit earum Quadratricum, quæ ſuam geneſim habent ex motu variabili tàm ſemidiametri, quàm lateris Quadrati.

Ut autem Quadratrices primæ Claſſis primo loco in medium afferamus, ſcilicet eas, quæ generari intelliguntur ex motu æquabili ſemidiametri AB, quæ fertur in orbem per circumferentiam Quadrantis *BD*, & ex motu utcumque variabili lateris Quadrati BC, quod eodem tempore deorsùm fertur ſibimet ipſi parallelum; perſpicuum eſt, ea ad tria genera præcipua reduci poſſe. Si quidem vel motus lateris Quadrati BC ita ponitur variabilis, ut tempora lationum ſint ut poteſtates quævis ſpatiorum, quæ temporibus iis deſcribuntur; & Quadratrices hoc pacto deſcriptæ erunt generis primi: vel idem motus ita ponitur variabilis, ut viciſſim quævis temporum poteſtates ſint ut ſpatia temporibus iis deſcripta; & Quadratrices, quæ hac lege deſcribuntur erunt generis ſecundi: vel denique motus lateris Quadrati *BC* ponitur ſubinde variabilis, ut conjunctim quævis temporum poteſtates ſint ut aliæ quævis poteſtates ſpatiorum, quæ temporibus illis percurruntur; & quæ hoc pacto deſcribuntur Quadratrices genus tertium conſtituunt. Atque horum porrò generum unumquodque infinitas alias ſpecies Quadratricum comprehendere, evidens quidem eſt. Etenim, prout diverſæ ponuntur poteſtates ſive temporum, ſive ſpatiorum, diverſa quoque erit Quadratrix deſcripta. Fig.96.

Sed nihilominùs poterunt omnes primi generis Quadratrices hac unica generali æquatione deſignari

ri $a\ y^m = b^m\ x$; poſitis, ut ſupra, integrâ Quadrantis circumferentiâ B D $= a$; (*ead. Fig.*) portiones ejus B F $= x$; Semidiametro A $B = b$; portione ejus B M $= y$. Etenim, cùm in hoc primo genere Quadratricum motus lateris ita ponatur variabilis, ut tempora lationum ſint ut poteſtates quævis ſpatiorum, quæ deſcribuntur illis temporibus; utique poteſtas quævis portionis ſemidiametri *B* M erit ad poteſtatem homogeneam totius ſemidiametri A B; ut tempus, quo deſcribitur portio B M ad tempus, quo deſcribitur ſemidiameter ipſa A *B*. Sed verò propter motum æquabilem ſemidiametri A B, quæ fertur in orbem, & eodem tempore versùs A D, quo *B* C versùs idem latus A D, quod ſemper nobis adſumimus; tempus, quo deſcribitur portio ſemidiametri B M eſt ad tempus, quo deſcribitur integra ſemidiameter A B, ut eſt portio circumferentiæ Quadrantis B F ad circumferentiam ipſam B D. Ergo erit, ex æqua ratione, ut poteſtas quævis portionis ſemidiametri B M ad poteſtatem homogeneam ipſius ſemidametri A *B*; ita portio circumferentiæ Quadrantis B F ad ipſam Quadrantis circumferentiam *B*D. Unde, poſitâ litterâ *m* pro exponente poteſtatis, ad quam aſcendit portio ſemidiametri BM, fiet proportio, ut y^m ad b^m, ita x ad a; atque adeò æquatio erit ut ſupra $a y^m = b^m\ x$.

Nec diſſimiliter Quadratrices ſecundi generis poterunt omnes hac unica generali æquatione definiri; $a^n\ y = b\ x^n$; manentibus, ut ſupra, circumferentiâ integrâ (*ead. Fig.*) Quadrantis *B* D $= a$; Semidiametro A $B = b$; portione circumferentiæ $BF = x$; & portione ſemidiametri B M $= y$. Siquidem, cum in

in hoc ſecundo genere Quadratricum motus lateris Quadrati BC ita quidem variabilis ponatur, ut ſpatia deſcripta ſint viciſſim ut poteſtates quævis temporum, quibus ſpatia illa deſcribuntur, utique portio ſemidiametri *B*M erit ad ſemidiametrum ipſam AB, veluti poteſtas quævis temporis, quo deſcribitur portio ſemidiametri *B*M ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur ſemidiameter ipſa A*B*; verumtamen, propter motum æquabilem ſemidiametri A*B*, quæ eodem tempore fertur in orbem per circumferentiam Quadrantis BD, poteſtas quævis temporis, quo deſcribitur portio ſemidiametri BM eſt ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur ſemidiameter ipſa A*B*; ut eſt ſimilis poteſtas portionis circumferentiæ Quadrantis *B*F ad poteſtatem homogeneam ipſius *Q*uadrantis Circumferentiæ *B*D. Igitur erit, ex æqua ratione, ut portio ſemidiametri *B*M ad ſemidiametrum ipſam A*B*; ita poteſtas quævis portionis circumferentiæ *Q*uadrantis *B*F ad poteſtatem homogeneam ipſius *Q*uadrantis circumferentiæ BD. Idcircoque, poſitâ litterâ x pro exponente poteſtatis, ad quam aſcendit portio Circumferentiæ *Q*uadrantis *B*F, erit ut y ad b ita x^n ad a^n; adeoque æquatio erit $bx^n = a^n y$. Uti ſupra modò dictum eſt.

Eadem quoque ratione *Q*uadratrices tertii generis poterunt omnes hac unica generali æquatione deſignari $a^n y^m = b^m x^n$; manentibus ſemper circumferentiâ *Q*uadrantis $BD = a$; [*ead. Fig.*] portione ejus $BF = x$; ſemidiametro $AB = b$; portione ejus $BM = y$. Nàm, cùm in hoc tertio genere *Q*uadratricum motus lateris *Q*uadrati *B*C ſubinde varius ſit, ut conjunctim temporum quævis poteſta-

tes

tes ſint uti aliæ quævis poteſtates ſpatiorum, quæ temporibus iis percurruntur; profectò poteſtas quævis portionis ſemidiametri *B* M erit ad poteſtatem homogeneam ipſius ſemidiametri A *B*, ut alia quævis poteſtas temporis, quo deſcribitur portio ſemidiametri B M ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur ſemidiameter ipſa A B. Jam verò propter motum æquabilem ſemidiametri A B, quæ eodem tempore fertur in orbem per circumferentiam Quadrantis B D; poteſtas temporis, quo deſcribitur portio ſemidiametri B M eſt ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur ſemidiameter ipſa A *B*, ut huic ſimilis poteſtas portionis circumferentiæ Quadrantis BF ad poteſtatem homogeneam ipſius circumferentiæ Quadrantis BD: quare erit, ex æqua ratione, ut poteſtas quævis portionis ſemidiametri *B* M ad poteſtatem homogeneam ipſius ſemidiametri A B; ita alia quævis poteſtas portionis circumferentiæ Quadrantis B F ad poteſtatem homogeneam ipſius circumferentiæ Quadrantis *B*D. Idcircoque, ſi dicatur *m* exponens poteſtatis, ad quam aſcendit portio ſemidiametri B M, & *n* exponens poteſtatis, ad quam aſcendit portio circumferentiæ Quadrantis *B*F, erit ut y^m ad b^m, ita x^n ad a^n; atque adeo æquatio erit, ut ſupra, $a^n \cdot y^m = b^m x^n$.

Quòd verò ſpectat ad Quadratrices ſecundæ Claſſis, nempè ad eas, quæ generari intelliguntur ex motu æquabili lateris Quadrati *B* C, (*ead. Fig.*) motu variabili ſemidiametri A *B*; palam eſt, illas ad tria quoque genera præcipua reduci poſſe. Etenim vel motus ſemidiametri A *B* ita ponitur variabilis, ut tempora lationum ſint ut poteſtates quævis ſpatiorum, quæ temporibus iis percurruntur: & quæ hac ratione deſcribuntur Quadratrices genus primi con-

conſtituent: vel idem motus ſemidiametri A B ita ponitur variabilis, ut viciſſim temporum quævis poteſtates ſint, ut ſpatia temporibus iis percurſa; & Quadratrices hoc pacto deſcriptæ genus ſecundum component: vel denique motus ſemidiametri A B ita quoque ponitur variabilis, ut conjunctim poteſtates quævis temporum ſint, ut aliæ quævis poteſtates ſpatiorum, quæ temporibus iis percurruntur; & Quadratrices, quæ hac ratione deſcribuntur, erunt generis tertii. Sed nihilominus quæ in hac ſecunda Claſſe genus primum conſtituunt, eædem ſunt cum illis, quæ in Claſſe antecedenti genus ſecundum conſtant; & quæ viciſſim in hac Claſſe conſtituunt genus ſecundum, eædem ſunt cum iis, quæ in Claſſe antecedenti componunt genus primum; quæ verò in utraque Claſſe ſunt generis tertii, ejuſdem quoque naturæ deprehenduntur.

Nam primò quia in Quadratricibus primi generis motus ſemidiametri AB, (*ead. Fig.*) quæ fertur in orbem per circumferentiam Quadrantis *B* D, ita ponitur variabilis, ut tempora lationum ſint uti poteſtates quævis ſpatiorum, quæ temporibus iis percurruntur; profectò poteſtas quævis portionis circumferentiæ Quadrantis BF erit ad poteſtatem homogeneam ipſius Quadrantis circumferentiæ BD, ut tempus, quo deſcribitur portio *B* F ad tempus, quo deſcribitur *B*D. Sed, propter motum æquabilem lateris Quadrati B C, quod eodem tempore fertur deorſum ſibimet ipſi parallelum, tempus, quo deſcribitur portio circumferentiæ Quadrantis B F eſt ad tempus, quo deſcribitur integra Quadrantis circumferentia *B* D, ut eſt portio ſemidiametri BM ad ſemidiametrum ipſam AB. Igitur erit, ex æqua ratione, ut poteſtas quævis portionis circumferentiæ Quadrantis B F ad poteſtatem homogeneam ipſius Qua-

Digitized by Google

drantis circumferentiæ BD, ita portio ſemidiametri BM, ad ſemidiametrum ipſam AB. Idcircoque, ſi ponatur m pro exponente poteſtatis, ad quam aſcendit portio Quadrantis circumferentiæ BF, erit ut x^n ad a^n ita y ad b: æquatioque erit $bx^n = a^n y$; eadem planè cum illa, quæ in Claſſe antecedenti Quadratrices ſecundi generis deſignabat.

Secundò, quia in Quadratricibus ſecundi generis motus ſemidiametri AB, (*ead. Fig.*) quæ fertur in orbem per circumferentiam Quadrantis BD ita ponitur variabilis, ut viciſſim poteſtates temporum ſint ut ſpatia temporibus iis deſcripta; erit quidem ut portio circumferentiæ Quadrantis BF ad ipſam Quadrantis circumferentiam BD, ita poteſtas quævis temporis, quo deſcribitur portio BF, ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur ipſa BD. Jam verò, propter motum æquabilem lateris quadrati BC, quod eodem tempore fertur deorſum ſibimet ipſi parallelum, poteſtas quævis temporis, quo deſcribitur portio circumferentiæ Quadrantis BF eſt ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur ipſa Quadrantis circumferentia BD, ut eſt huic ſimilis poteſtas portionis ſemidiametri BM ad poteſtatem homogeneam ipſius ſemidiametri AB: quare erit, ex æqua ratione, ut portio circumferentiæ Quadrantis BF ad ipſam Quadrantis circumferentiam BD; ita poteſtas quævis portionis ſemidiametri BM ad poteſtatem homogeneam ipſius ſemediametri AB: proindeque, ſi dicatur m exponens poteſtatis, ad quam aſcendit portio ſemidiametri BM, erit ut x ad a ita y^m ad b^m: atque adeo æquatio erit $ay^m = b^m x$; eadem cum illa planè, quæ in claſſe antecedenti Quadratrices generis primi indicabat.

Tertio

Tertiò quia in Quadratricibus tertii generis motus ſemidiametri A *B*, (*ead. Fig.*) quæ fertur in orbem per circumferentiam Quadrantis *B* D, ita ponitur variabilis, ut conjunctim poteſtates temporum ſint ut aliæ quævis poteſtates ſpatiorum, quæ temporibus iis percurruntur; erit quidem poteſtas quævis portionis circumferentiæ Quadrantis *B* F ad poteſtatem homogeneam ipſius Quadrantis circumferentiæ BD; ita alia quævis poteſtas temporis, quo deſcribitur portio BF, ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur ipſa *B*D; ſed propter motum æquabilem lateris quadrati BC, quod eodem tempore fertur deorſum ſibimet ipſi ſemper æquidiſtans, poteſtas quævis temporis, quo deſcribitur portio circumferentiæ Quadrantis BF eſt ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur ipſa Quadrantis circumferentia *B* D, veluti eſt huic ſimilis poteſtas portionis ſemidametri B M ad poteſtatem homogeneam ipſius ſemidiametri AB: quare erit, ex æqua ratione, ut poteſtas quævis portionis circumferentiæ Quadrantis *B* F ad poteſtatem homogeneam ipſius Quadrantis circumferentiæ B D; ita alia quævis poteſtas portionis ſemidiametri BM ad poteſtatem homogeneam ipſius ſemidiametri AB. Igitur, ſi dicatur *m* exponens poteſtatis, ad quam aſcendit portio ſemidiametri BM, & *n* exponens poteſtatis, ad quam aſcendit portio circumferentiæ Quadtantis BF, erit ut x^n ad a^n ita y^m ad b^m; æquatioque eſt $a^n \; y^m = b^m \; x^n$; eadem planè cum illa, quæ in claſſe antecedendi Quadratrices generis tertii denotabat.

Superſunt Quadratrices tertiæ Claſſis, ſcilicet eæ, quæ generari intelliguntur ex motu variabili tàm ſemidiametri A *B*, (*ead. Fig.*) quæ fertur in

orbem per circumferentiam Quadrantis B D, quàm lateris quadrati B C, quod eodem tempore fertur deorſum ſibimet ipſi parallelum. Atque ejuſmodi Quadratrices ad novem genera præcipua reduci poſſe, compertum quidem eſt. Etenim, cùm uterque eorum motuum triplici modo poſſit variari; primo nempè, ſi tempora lationum ſint ut poteſtates quævis ſpatiorum, quæ temporibus iis deſcribuntur: ſecundo ſi viciſſim temporum poteſtates quævis ſint, ut ſpatia temporibus iis deſcripta; ac poſtremo ſi conjunctim temporum quævis poteſtates ſint ut poteſtates aliæ ſpatiorum, quæ temporibus iis percurruntur; profectò unus motus cum alio novem modis diverſis poteſt combinari; atque ita ex diverſis hiſce combinationibus totidem alia genera Quadratricum exiſtent. Verum enim vero Quadratrices omnes hujus tertiæ claſſis, cujuſcumque eæ ſint generis, poterunt hac unica generali æquatione deſignari $b^m x^n = a^n y^m$; retentis, veluti ſupra, integrâ Quadrantis circumferentiâ $BD = a$; ſemidiametro $AB = b$; portione Quadrantis circumferentiæ $BF = x$; & portione ſemidiametri $BM = y$.

Siquidem, ſi uterque motus eo modo ponatur variabilis, ut poteſtates ſpatiorum ſint ut aliæ quævis poteſtates temporum, quibus ſpatia illa deſcribuntur, (quæ quidem hypotheſis alias quoque duas comprehendit, in quibus vel ſpatia, vel tempora ad nullam poteſtatem elevata ponuntur) erit primò ut poteſtas quævis portionis circumferentiæ Quadrantis *B* F [*Fig. ead.*] ad poteſtatem homogeneam ipſius Quadrantis circumferentiæ B D; ita alia quævis poteſtas temporis, quo deſcribitur portio *B* F ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur ipſa *B* D. Et ſecundò ut poteſtas quævis

por-

portionis ſemidiametri BM ad poteſtatem homogeneam ipſius ſemidiametri AB; ita alia quævis poteſtas temporis, quo deſcribitur portio BM ad poteſtatem homogeneam temporis, quo deſcribitur ipſa AB: & hac ratione, ſi dicatur t tempus, quo deſcribitur tam portio circumferentiæ *Quadrantis* BF, quàm portio ſemidiametri BM; & T tempus, quo deſcribitur tàm ipſa *Quadrantis* circumferentia BD, quàm ipſa ſemidiameter AB; dicaturque prætereà p exponens poteſtatis, ad quam aſcendit portio BF; q exponens poteſtatis, ad quam evehitur tempus t; quotieſcumque cum ipſa BF componatur; r exponens poteſtatis, ad quam extollitur portio ſemidiametri BM; & s exponens poteſtatis, ad quam aſcendit idem tempus t, ubi confertur cum ipſa BM; erit primo ut x^p ad a^p, ita t^q ad T^q. Et ſecundò, ut y^r ad b^r, ita t^s ad T^s. Jam verò ex proportionalitate prima eruitur, quòd t ſit ad T, ut $x^{\frac{p}{q}}$ ad $a^{\frac{p}{q}}$; & ex ſecunda proportionalitate, quòd t ſit ad T, ut $y^{\frac{r}{s}}$ ad $b^{\frac{r}{s}}$. Quare, ſi ponatur $\frac{r}{s} = m$, & $\frac{p}{q} = n$; erit, ex æqua ratione, ut x^n ad a^n, ita y^m ad b^m; atque idcircò æquatio erit ut ſupra $b^m x^n = a^n y^m$.

CAPUT

CAPUT X.

De Cycloìde, & Epicycloìde Recentiorum.

INquiſivimus hactenus earum Curvarum Mechanicarum naturam, quas Veteres Geometræ excogitarunt: & methodum tradidimus alias in infinitum ad ipſarum ſimilitudinem efformandi. Reſtat modò, ut ad Curvas Mechanicas gradum adhùc faciamus, quas ipſi Geometræ Recentiores contemplati ſunt. Cumque inter eas primum locum obtineat Curva illa, quæ Cycloidis nomine nuncupatur; de ea primùm peragendum ſuſcipiemus. Atque illam primus omnium conſideravit Galileus Magni Etruriæ Ducis laudatiſſimus Mathematicus: tùm ipſam eandem paullò adcuratiùs ſunt proſequuti præclari duo Geometræ Torricellius Faventinus in Italia, & Robervallius in Galliis. Denique propter ipſius inſignes uſus, ac proprietates ab aliis quoque poſterioribus Geometris pluris ea habita fuit. Quin etiam nonnulli integros, juſtoſque de hac Curva libros conſcripſere: atque Hiſtoricus Memorabiliorum, quæ in Regia Scientiarum Academia Pariſienſi acta ſunt; fatetur, nullam aliam Curvam lineam tantâ diligentiâ Recentiores Geometras pertractaſſe, quantâ Cycloìdem Galilei.

Ut autem hujus Curvæ claram, diſtinctamque notionem præbeamus; intelligatur circa rectam lineam AB, tanquam diametrum, deſcriptus Circulus ACB, ex cujus circumferentia ducantur ad ipſam diametrũ ordinatæ quævis CM; eæque protrahantur uſque ad puncta

Fig. 97.

punƈta N; ſed ita tamen ut portiones ipſarum CN ſint æquales arcubus correſpondentibus AC; & erit Curva pertranſiens per punƈta illa N ipſa Cycloìs Galilei: cumque in punƈto *B* extremo altero diametri A B ordinata CM evaneſcat; ducenda eſt ex punƈto illo reƈta linea *BD* ipſi MN parallela; quæ ſit æqualis ſemicircumferentiæ A C B; atque idcircò tota reƈta linea D*B*D, quæ dicitur Baſis deſcriptæ Cycloìdis DAD, æqualis erit integræ circumferentiæ ipſius Circuli, qui Circulus *Genitor* nominatur.

Ex quo patet, hujus Curvæ eam eſſe præcipuam proprietatam, ut quævis ejus ordinata MN [*ead. Fig.*] adæquet ordinatam Circuli correſpondentem CM una cum correſpondente arcu *AC*. Nam reverà ipſam Circuli ordinatam CM eô uſque in N protraximus, ut CN ſit æqualis ipſi AC. Qua de re, ſi diameter Circuli A*B* dicatur a; ponaturque abſciſſa AM $= x$; ordinata MN $= y$; & arcus AC $= z$, quia per Circuli naturam habetur CM $=$

$\sqrt{ax - xx}$, erit Cycloìdis æquatio $y = \sqrt{ax - xx}$

$+ z$, ſive $y - z = \sqrt{ax - xx}$; aut etiam $yy -$

$2yz + zz = ax - xx$. Sed non tamen ideò Curva iſta Geometrica putanda eſt. Etenim, cum inventa æquatio ex triplici conſtet incognitâ; nam præter abſciſſam x, & ordinatam y, reperitur in ea tertia ingnota z, quæ valorem deſignat arcus correſpondentis AC; profeƈtò ſi alia æquatio invenienda eſſet pro relatione, quæ eſt inter abſciſſam AM, & arcum AC; hæc ad infinitas dimenſiones adſcenderet: & conſequenter ſi in æquatione Cycloìdis modò inventa ſubſtituendus eſſet valor ipſius z per abſciſſam x expreſſus, ut duæ tantùm incognitæ magni-

gnitudines relinquerentur, ſcilicet abſciſſa x, & ordinata y: quæ inde orietur æquatio ad infinitas item dimenſiones adſcenderet: atque ideo ipſa Cycloïs erit generis infiniteſimi: proindeque Curva erit Mechanica Tranſcendens, ac Geometricè irrationalis.

Fig. 98. Jam vero cum in Cycloïde D*B*D portio cujuſque ordinatæ CN adæquet arcum Circuli correſpondentem AC; palam eſt, quòd, ſi ex puncto N ducatur recta NE parallela ei, quæ ducitur ex C ad B, portio baſis BE ſit etiam æqualis arcui A*C*: cùm propter parallelogrammum *B*N, æqualia ſint ejus latera oppoſita BE, CN. Quocircà, ſi Circulus ACB ita revolvi intelligatur ſuper rectam lineam BD, ut ſemicircumferentiâ ſuâ emetiatur ipſam BD, cui eadem ex conſtructione eſt æqualis; perſpicuum eſt, punctum ipſius A hoc motu deſcribere cetera puncta ſemicycloïdis AND. Etenim, ſi ſuper ipſa NE deſcribatur ſegmentum Circuli ſimile, & æquale alteri C*B*; quia parallelæ ſunt rectæ lineæ C*B*, NE, eædem erunt eorum ſegmentorum poſitiones; atque ideò, quemadmodum recta linea BD contingit ſegmentum primum in puncto *B*, ita, etiam continget ſegmentum ſecundum in puncto E. Unde, ſi ſegmentum iſtud ſecundum extendatur versùs E, ut habeatur integer ſemicirculus NEF; hic jacebit totus ſupra rectam *B*D: & quia æquales ſunt ſemicirculi ACB, NEF; æqualesque etiam portiones CB, NE; erunt ſimiliter æquales portiones reliquæ AC, EF: cùmque ipſi AC æqualis oſtenſa ſit portio baſis BE, erit eadem *B*E ipſi EF æqualis: idcircoque erit FEN poſitio ſemicirculi BCA in puncto E; cùm ejus circumferentia rectam lineam *B*D emetiatur: proindeque punctum ejus A reperietur in puncto Cycloïdis N: atque ita motus ſemicirculi BCA illud deſignabit.

Hinc

Hinc geneſis Cycloidis ex Circuli circumvolutione vulgò repeti ſolet; nempè ſi Circulus aliquis ſuper aliqua recta linea ſubinde revolutus intelligatur, ut præter motum progreſſivum habeat quoque motum circularem; nam punctum, quo ipſe Circulus prima ſua poſitione rectam illam lineam contingit, deſcribet lineam Curvam, quam ex modo oſtenſis perſpicuum eſt, Cycloidem eſſe Galilei: cumque, completa prima circumvolutione, poſſit idem Circulus ſuper eadem recta linea circumvolutiones alias habere in infinitum; palam eſt, Cycloides alias hoc pacto in infinitum deſcribi, quæ dici poterunt Prima, Secunda, Tertia; pro ut primâ, ſecundâ, aut tertiâ ejus Circuli circumvolutione generantur. Proindeque, cum omnes has Cycloides, quæ unicam Curvam lineam, utpote ejuſdem Circuli motu deſcriptæ, conſtituunt, poſſit una, eademque recta linea in infinitis punctis ſecare; perſpicuum eſt, Curvam iſtam eſſe generis infiniteſimi; ac proinde ejus æquationem, ut ſuperiùs indicavimus, ad dimenſiones infinitas adſcendere. Figura 99.

Porrò, cum integra baſis Cycloidis DBD ſit æqualis circumferentiæ integræ Circuli genitoris ACB; liquet, quòd, ſi per punctum A ducatur recta AF ipſi DBD parallela; & compleatur rectangulum DF; quòd, inquam, rectangulum iſtud æquale ſit quadruplo ipſius Circuli genitoris. Etenim, cum area Circuli genitoris producatur, multiplicando ipſius circumferentiam integram per dimidium ſemidiametri; vel, quod idem eſt, multiplicando baſim Cycloidis DBD per dimidium ſemidiametri; & area rectanguli DF, multiplicando eandem baſim Cycloidis DBD per ipſam diametrum AB; erit area Circuli genitoris ad aream rectanguli DF, veluti dimidium ſemidiametri ad diametrum ipſam AB: proindeque, quia dimi- Figura 100.

dium ſemidiametri quarta pars eſt ipſius diametri AB; erit etiam area Circuli genitoris quarta pars areæ rectanguli DF: atque idcircò ipſum rectangulum D F quadruplum erit Circuli genitoris.

Sed, cum hoc rectangulum dividatur per ipſam Cycloidem in duo alia ſpatia, (quorum, quod baſi DBD terminatur in duas partes per conſtructionem æquales diviſum, dici ſolet ſpatium Cycloidale internum ; quod verò ſupereſt in duas quoque partes diſciſſum æquales, ſpatium Cycloidale externum) ipſam proportionem, quæ eſt inter hæc duo ſpatia, Recentiores Geometræ adinvenerunt. Nempè, quòd ſpatium Cycloidale internum ſit triplum ſpatii Cycloidalis externi: & rectè id demonſtrarunt. Hinc autem deducitur, ſpatium Cycloidale externum æquale eſſe Circulo genitori; atque ideò ſpatium Cycloidale internum triplum quoque eſſe ipſius Circuli genitoris. Etenim, cùm rectangulum D F [*ead. Fig.*] per Cycloidem ita dividatur, ut ſpatium Cycloidale externum tertia pars ſit ſpatii Cycloidalis interni, erit idem ſpatium Cycloidale externum quarta pars ipſius rectanguli D F. Quamobrem, quia Circulus genitor eſt ſimiliter quarta pars ejuſdem rectanguli D F, erit ſpatium Cycloidale externum æquale Circulo Genitori; atque ideo ipſe Circulus Genitor, perinde ac ſpatium Cycloidale externum, tertia pars erit ſpatii Cycloidalis interni.

Quoniam verò ſpatium Cycloidale internum per diametrum *AB* (*ead.Fig.*) in duas partes æquales dividitur, perinde ac ipſe Circulus Genitor, per geneſim Cycloidis, uti diximus; erit ſpatium Semicycloidale internum A B D A triplum quoque ſemicirculi Genitoris ABCA: & idcircò ſpatium intermedium A C B D N A duplum erit ejuſdem ſemicirculi Genitoris ABCA. Unde cum rectangulum A D ſit æquale duplo Circuli Genito-

nitoris, erit ſpatium Cycloidale externum ADFA æquale ſemicirculo Genitori: proindeque ſimul adæquabunt ſpatium Cycloidale intermedium ACBDNA.

Præterea illud a Geometris oſtenſum eſt, quòd ſcilicet ſi recta MN ſit ordinata quævis Cycloidis AND; & per punctum N agatur recta NO ipſi AB parallela; quòd, inquam, ſpatium Cycloidale externum ANO æquale ſit ſpatio Circulari correſpondenti AMC. Unde duo deducuntur cognitu digna: nempè primò quòd, ſi ordinata MN incidat in centrum Circuli Genitoris, quadratura ſpatii Cycloidalis intermedii ACN haberi poſſit abſque poſita quadratura Circuli; cùm ipſum ſpatium Cycloidale intermedium ACN proveniat æquale Quadrato, quod fit ex radio ipſius Circuli genitoris. Nam, quia MN ordinata ſupponitur incidere in centrum Circuli; erit tàm abſciſſa AM, quàm portio ordinatæ MC ejus Circuli radius: atque idcircò portio altera ordinatæ CN æqualis circumferentiæ Quadrantis AC. Unde, cum rectangulum AN ſit æquale duobus rectangulis, uni nempè, quod fit ex AM in MC; & alteri, quod ex AM in CN: profectò, quia rectangulum ex AM in MC eſt æquale quadrato radii AM; & rectangulum ex AM in CN eſt æquale duplo Quadrantis AMC; erit idem rectangulum AN æquale quadrato radii AM, unà cum duplo Quadrantis AMC: & propterea rectangulum ipſum AN diminutum duplo Quadrantis AMC, æquale erit quadrato ſolius radii AM. Jam verò, cùm ſpatium Cycloidale ANO ſit æquale ſegmento Circulari correſpondenti AMC; rectangulum AN duplo Quadrantis AMC diminutum eſt æquale ſpatio Cycloidali intermedio ACN. Igitur, cum ordinata MN incidit in centrum Circuli Genitoris, ſpatium Figura 101.

Cycloidale intermedium A C N eſt æquale quadrato, quod ſit ex radio ipſius Circuli Genitoris.

Figura 102.

Alterum quod deducitur illud eſt; quòd, ſi eadem ordinata MN incidat in aliud punctum diametri Circuli genitoris AB, cujus centrum E; ſed ita tamen ut abſciſſa AM ſit quarta pars ipſius AB; & conſequenter dimidia radii AE; quòd, inquam, ſpatii Cycloidalis AMN quadratura poſſit quoque haberi abſque poſita Circuli quadratura; cùm ipſum ſpatium Cycloidale AMN exſtet æquale triplo trianguli ACM. Quoniam junctâ CE, cum rectangulum AN ſit æquale duobus rectangulis, uni ſcilicet, quod ſit ex AM in MC, & alteri, quod ſit ex AM in GN; profectò, quia AM dimidia ſupponitur radii AE; atque ideò rectangulum ex AM in MC eſt æquale ſectori AEC; erit idem rectangulum AN æquale rectangulo AMC unà cum ſectore AEC. Unde, cùm ſpatium Cycloidale externum ANO ſit æquale ſegmento Circulari correſpondenti AMC; ſi ab rectangulo AN auferatur ſpatium Cycloidale externum ANO; & ex rectangulo AMC unà cum ſectore AEC dematur ſpatium Circulare AMC, ſupererit ſpatium Cycloidale AMN æquale rectangulo AMC, unà cum triangulo CME: & propterea, quia rectangulum AMC eſt æquale duplo trianguli ACM; & propter baſes æquales AM, ME, eidem triangulo ACM eſt æquale etiam triangulum CME, erit idem ſpatium Cycloidale AMN æquale triplo trianguli correſpondenti ACM.

Porrò præter hanc Cycloidem, quæ Primaria dici ſolet; duas alias Cycloides excogitarunt Recentiores Geometræ, unam quidem *Protractam*, *Contractam* verò alteram. Nam, quemadmodum in Cycloide

cloïde primaria portio cujusvis ordinatæ C N [*ead. Fig.*] eſt æqualis arcui correſpondenti A C ; ipſaque ideò baſis *B* D æqualis ſemicircumferentiæ AC*B*; ita conſiderarunt, fieri poſſe, ut eadem portio ordinatæ C N ſit ad arcum ſuum correſpondentem A C in qualibet alia data ratione; ex. gr. *m* ad *n* : & hac conſideratione illæ duæ aliæ Cycloïdes ipſis ſubortæ fuerunt. Etenim, ſicuti cum habetur magnitudo *m* æqualis magnitudini *n*, oritur ipſa Cyclois primaria ; quia ratio fit æqualitatis; ita etiam ſi magnitudo *m* fuerit primò major magnitudine *n*, fiet locus Cycloïdi *Protractæ* ; cum ejus baſis *B* D major fiat ſemicircumferentiâ A C B. Et, ſi ſecundò magnitudo *m* minor fuerit eadem magnitudine *n*, habebitur Cyclois altera *Contracta* ; quia baſis ipſius *B* D redditur viciſſim ſemicircumferentiâ A C B minor.

Sed hæ interim Cycloïdes cùm non multùm inter ſe differant ; & ex proprietatibus jam cognitis Cycloïdis primariæ nullo negotio deduci queant proprietates tàm Cycloïdis protractæ, quàm Cycloïdis contractæ; ſupervacaneum exiſtimo de iis plura ſubjungere. Quocircà aliam Curvam lineam conſiderandam ſuſcipimus *Epicycloidem* dictam ; quoniam etſi ad Cycloïdis ſimilitudinem ſit ea excogitata ; multum tamen abeſt,ut ex proprietatibus Cycloïdis proprietates illius poſſint deduci : quin etiam talis naturæ deprehenditur, ut potiùs ex ejus proprietatibus proprietates Cycloïdis eruantur . Nam intelligitur generari ex revolutione unius Circuli ſuper alium Circulum ; cujuſmodi eſt Curva A N D deſcripta ex revolutione Circuli AC*B* ſuper alium Circulum BDE; ita ut integra Curvæ baſis D B D , perinde ac in Cycloïde, ſit æqualis circumferentiæ integræ Circuli genitoris AC*B* . Hinc enim conſectatur, quòd, ſi centrum F ſecundi Circuli B D E abeat in infinitum ; Figura 103.

quia

quia hoc caſu ipſius circumferentia recta linea evadit; ipſa Curva AND in Cycloidem vulgarem immutatur; & propterea proprietates omnes ſubeat Cycloidis ordinariæ.

Ex ipſa autem hujus Curvæ geneſi deducitur, quòd, ſi Circulus Genitor ACB intelligatur perveniſſe ad poſitionem NGH, ut propterea deſcribat Epicycloidem AN; quòd, inquam, centro F, & intervallo FN deſcripto Circulo NCM, qui ſecet Circulum Genitorem ACB in puncto C, abſciſſus arcus AC ſit æqualis arcui BG. Nam, quia Circulus NGH contingit Circulum BGD in puncto G, ductus radius FG pertranſibit per centrum ipſius ſemicirculi NGH: idcircoque erit angulus NFG æqualis angulo CFB; atque ideò, quia latera NF, FG æqualia ſunt lateribus CF, FB alterum alteri; erit baſis unius trianguli NG æqualis baſi alterius trianguli CB. Sed in Circulis æqualibus æquales chordæ æquales arcus abſcindunt; igitur, cum chorda NC æqualis ſit chordæ C*B*; erunt etiam æquales arcus NG, C*B*; & conſequenter æquales quoque arcus reliqui GH, AC. Jam verò propter ipſam geneſim Epicycloidis arcus GH eſt æqualis arcui BG; quare erit etiam eidem arcui BG æqualis ipſemet arcus AC.

Figura 104.

Unde patet etiam, quòd idem arcus AC (*ead. Fig.*) adæquat portionem in circumferentia Circuli *B*D ſimilem arcui intercepto CN. Nam, cum angulus NFG ſit æqualis angulo CFB, erunt quoque æquales arcus, quibus inſiſtunt, NO, CM. Et propterea erunt etiam æquales arcus NC, OM. Unde, quia arcus OM ſimilis eſt arcui BG, cum ambo eumdem angulum ſubtendant, erit etiam eidem arcui BG ſimilis arcus NC. Sed arcui *B*G oſtenſus eſt æqualis arcus AC: quare arcus AC adæqua-

æquabit portionem in circumferentia Circuli *B* D ſimilem arcui intercepto C N.

Atque hinc expedita nobis ſubnaſcitur Epicycloidem in plano per puncta deſcribendi ratio: ſcilicet, ſi ſumptâ in circumferentia Circuli Genitoris portione quavis A C, [*ead. Fig.*] abſciſsâque ex circumferentia alterius Circuli portione alterâ BG, quæ ipſi A C ſit æqualis, fiat angulus G F N æqualis angulo A F C. Nam, deſcripto deinde ex centro F arcu M N, qui tranſeat per punctum C; hic occurret rectæ lineæ F N in puncto N, quod erit in Epicycloide quæſita: & eadem ratione cetera alia ejus puncta invenientur.

Porrò circa hanc Curvam tres caſus diſtinguere oportet pro triplici relatione, quam habere poſſunt Circuli A C B, BGE. Nam primò, vel Circulus Genitor A C *B* eſt æqualis alteri Circulo *B*GE; & quia æquales ſunt etiam ipſorum circumferentiæ; baſis Epicycloidis erit integra circumferentia alterius Circuli *B* G D: proindeque ipſa Epicyclois erit tamquam Ovalis circa diametros A*B*, BE ipſorum Circulorum, veluti unam rectam lineam, deſcripta. Atque hoc caſu perſpicuum eſt, Epicycloidem non tàm fieri per revolutionem Circuli A C B ſuper circumferentia alterius *B*GE, quàm per revolutionem Circuli *B*GE ſuper circumferentia prioris AC*B*. Secundò vel idem Circulus Genitor A C B minor eſt Circulo altero *B* G E; & quia circumferentia illius minor eſt quoque circumferentiâ alterius hujus Circuli; baſis Epicycloidis minor adhùc erit circumferentiâ Circuli B *G* E: atque ideò ipſa Epicyclois ad punctum E extremum alterum diametri hujus Circuli non pertinget. Vel denique Circulus Genitor A C B major eſt Circulo *B* G E; & quia major eſt quoque ipſius circumferentiâ; erit baſis Epicycloidis major etiam cir-

Figura 105.

Figura 106.

Figura 107.

Digitized by Google

circumferentiâ Circuli BGE: atque ideò partes ipſius Epicycloidis ſe ſe interſecabunt propè extremum alterum diametri E; cùm portio, quæ ex dextra incipit, deſinat ad ſiniſtram; & viciſſim portio, quæ incipit a ſiniſtra, deſinat detrorſum.

Jam verò Curva iſthæc non in omni caſu deprehenditur Mechanica, & naturæ traſcendentis; ſed tantùm cum radii Circulorum ACB, BGE, eam inter ſe habent proportionem, quæ nullis quidem numeris exprimi poteſt. Nam primò, ſi Circulus Genitor ACB adæquet Circulum alium BGE; quia, ex nuper oſtenſis, portio quævis circumferentiæ Circuli Genitoris AC adæquat portionem aliam in circumferentia alterius Circuli BG ſimilem arcui intercepto CN; & propter æqualitatem eorum Circulorum, portio AC non modo eſt æqualis, ſed etiam ſimilis portioni BG; erit eadem portio AC ſimilis quoque arcui intercepto CN: & conſequenter, ſi punctum H ſit centrum Circuli genitoris ACB, erit angulus AHC æqualis angulo CFN. Unde Epicyclois hoc caſu Geometricè deſcribetur: ſcilicet, ſi in centro Circuli genitoris ſumpto quoquis angulo AHC; fiat in centro alterius Circuli angulus CFN æqualis priori AHC; quandoquidem, exiſtente FN ipſi FC æquali, erit N punctum Epicycloidis: & proinde ipſa Curva naturæ evadet Geometricæ.

Figura 108.

Secundò eadem Curva AND deprehenditur quoque naturæ Geometricæ, quotieſcunque radii ipſorum Circulorum ACB, BGD non quidem ſunt æquales, ſed quamvis inter ſe habeant proportionem, quæ numeris exprimi poſſit. Quippè, cum per generalem Epicycloidis proprietatem, arcus CN ſimilis ſit arcui BG, erit angulus BFG æqualis angulo CFN: & conſequenter, cum ſimiles ſint ſectores

Figura 109.

FBG,

FBG, FCN; erit ut FB ad BG, ita FC ad CN; atque ideo arcus BG diviſus per radium BF æqualis erit arcui CN diviſo per radium FC; inde eſt, ut punctum Epicycloidis N inveniatur; ſi conſtituto in centro Circuli Genitoris angulo AHC, fiat ut radius BF unius Circuli ad radium AH alterius, ita angulus aſſumptus AHC ad angulum CFN; quippè exiſtente FN ipſi FC æquali, erit etiam N punctum Epicycloidis.

Etenim ſi fiat angulus BFG (*ead. Fig.*) æqualis angulo CFN, erit ſimiliter ut radius BF ad radium AH, ita angulus AHC ad angulum BFG. Sed angulus AHC eſt ad angulum BFG, ut arcus AC diviſus per radium AH, ad arcum BG diviſum per radium BF: quare erit, ex equa ratione, ut radius BF ad radium AH; ita arcus AC diviſus per radium AH ad arcum BG diviſum per radium BF. Et conſequenter arcus AC æqualis erit arcui BG; unde, cùm propter angulos æquales BFG, CFN, ſimiles ſint arcus BG, CN; erit arcus AC æqualis arcui BG; qui eſt ſimilis arcui intercepto CN: propterea que punctum N erit in Epicycloide quæſita.

Jam verò, quia tùm dumtaxat inveniri poteſt Geometricè, ſive per Curvam Geometricè rationalem angulus CFN, (*ead. Fig.*) ad quem angulus adſumptus AHC ſit ut radius BF ad radium AH; quotieſcunque proportio ipſorum radiorum BF, AH numeris exprimitur; & nequaquàm cum eadem proportio nullis quidem numeris poteſt deſignari, ut Geometræ norunt: hinc eſt, ut Epicyclois eò dumtaxat caſu deprehendatur naturæ Mechanicæ, ac traſcendentis, cum proportio radii BF ad radium AH rationalis exiſtit. Quod etiam oſtendi poteſt ex eo, quia, exiſtente irrationali proportione radiorum, irrationalis ſit etiam proportio, quæ inter

ipſas circumferentias intercedit. Et idcircò, ſi Circulus Genitor A C B, completâ primâ revolutione, intelligatur adhùc revolui ſuper circumferentiâ alterius Circuli BGD, ut faciat ſecundam, tertiam, quartam revolutionem, punctum deſcribens nunquam perveniet ad primum illud punctum, in quo cœperat Circulus Genitor moveri; atque ità deſcribet Curvam, quam in infinitis punctis poterit recta linea ſecare.

Figura 110.

Æquatio verò algebrica Epicycloidis primo caſu deſcriptæ Circulorum æqualium A C B, B G E (*Fig.* 108. *pag.* 200.) facile obtinebitur; ſi, poſitis omnibus, uti ibidem; & ductâ ex puncto N Curvæ quæſitæ lineâ N M normali ad datam F E B H A, ſint F M abſciſſæ x; atque M N ardinatæ y. Nam, junctis HC, CF, & FN, quæ ſecet Circulum B E in D; ex D ducatur normalis D O ad F C. Eſt quidem quadratum F N æquale quadratis ex N M, MF: quare expreſſus ejus valor habebitur. Atqui NF = CF. Idcircò in triangulo C H F latera C H, H F nota erunt, & data; denominatum verò latus F C. Igitur denominatus habebitur ſinus anguli C H F, ſeu C H A. Sed hic ſinus æqualis ſinui D O anguli DOF, qui eſſe debet æqualis angulo C H A: & Circuli ſunt æquales. Igitur, poſitâ ex N ductâ normali N G ad radium F C Circuli N C concentrici cum B E; quique per N, & C ſemper pertranſit; habebitur, per ſimilitudinem triangulorum F D O, F N G, expreſſus valor ipſius N G. Atqui, ſi ex D ducatur alia D I normalis ad F B radium Circuli ipſius BE; valor etiam expreſſus illius quidem erit per ſimilitudinem triangulorum F N M, F D I. Ergo, cùm ſit N G ad N M, uti D O ad D I; & omnium inventæ ſint expreſſiones valorum; obtinebitur quæſita æquatio Epicycloidis; quæ ejus naturam propiùs, ac perſpectiùs nobis repræſentabit. Se-

Digitized by Google

Secundo caſu Circulorum inæqualium A C B, BGD (*Fig.* 109. *pag.* 200.); quorum radii rationem mutuam habeant numeris expreſſam; comparare etiam nobis facile æquationem algebricam Curvæ naturam continentem poſſumus, eadem ferme analyſi. Etenim, poſitis omnibus plane uti in primo caſu; denominatus ſinus CP anguli CHA, uti modo inventus eſt, pro ignotâ erit accipienda, cùm ſit normalis ad HA, in inveniendo ſinu anguli, qui ad ipſum CHA datam habeat rationem, quæ eſt inter dictos radios Circulorum. Acceptâ verò hac ignotâ; dein ſecundum proportionem, quæ intereſſe debet inter ſinum anguli unius CHA ad ſinum alterius anguli DFO, qui rationem imperatam mutuò ſervent, invenietur expreſſus valor ſinûs DO anguli DFO. Hoc pacto. Sit ex. gr. ratio radiorum HA, FB juſſa uti 1 ad 3. Igitur angulus DFO, ſeu arcus DK illum ſubtendens debet eſſe triplus anguli CHA, ſeu arcûs CA. Soluto autem problemate triſectionis anguli, jam noſcitur proportio ſinûs CP anguli CHA, qui ſit tertia pars quæſita anguli dati, ad ſinum ipſiuſmet anguli dati in tres æquales partes dividendi. Quare, cùm debeat eſſe DFO triplus anguli CHA; & cũ habeamus notam dictam proportionem, quæ dicatur *p* ad *r*; & denominatus ſit ſinus ipſe CP; denominatus quoque erit per quartam proportionalem ſinus DO ignotis *x*, & *y*, in ratione, in qua duo termini ſunt *p*, & *r*, tertius verò ipſa CP denominata eiſdem ignotis *x*, & *y*. Hoc ſinu DO denominato in Circulo BE, cetera fiant uti ſupra: & exoptatam habebimus æquationem; quæ hoc ſecundo caſu deſcriptam Epicycloidem demonſtrabit. Atque ita de reliquis caſibus rationis imperatæ dictorum angulorum, ſeu radiorum.

Digitized by Google

Ratio radii Circuli A C ſuperioris ad radium Circuli B E inferioris accepta eſt, uti noſti, minoris ad majus. Si propoſita fuerit ratio illa majoris ad minus; tum origo abſciſſarum Epicycloidis F accipiatur à centro H Circuli A B; qui immutabitur in Circulum inferiorem. Item ſine hac immutatione originis abſciſſarum Epicycloidis, idem conficietur eadem, qua ſupra, viâ. Nam, quia, inventâ anguli triſectione, ut eidem exemplo inſiſtatur, noſcitur probe, uti diximus, proportio ſinus anguli trientis anguli dati; qui ſinus in noſtro caſu eſt ipſa D O, ad ſinum anguli dati in tres partes æquales ſecandi, qui eſt in noſtro caſu ipſa C P; ſi profecto hæc ratio inter hos duos ſinus dicatur eodem modo *p* ad *r*, denominata ſane quoque erit eodem modo ignotis *x*, & *y* ipſa D O, per quartam proportionalem, in ratione, cujus duo termini ſunt *p*, & *r*, tertius verò ipſa C P denominata, uti modò ſupra, eiſdem poſitis ignotis *x*, & *y*. Ex hac verò inventione æquationis utriuſque caſus deſcriptæ Epicycloidis noſcitur neceſſitas rationis inter duos inæqualium Circulorum radios, quæ numeris exprimi poſſit.

CAPUT

CAPUT ULTIMUM.

Curvæ aliæ Mechanicæ.

EXplicatâ naturâ tàm Cycloidis, quàm Epicycloidis, quæ ſunt principes Curvæ Mechanicæ à junioribus Geometris excogitatæ, nunc alias Curvas ſtrictè perſtringemus, quæ paſſim circumferuntur. Et primò Curva Logiſtica, ſive Logarithmica occurrit; ſic dicta, quòd Logarithmorum inventioni ſit uſui. Ejus autem geneſis in hunc modum à Geometris concipitur. Sumantur in recta linea indefinita A B portiones quæcumque æquales AC, CD, DE, EF; & ex punctis A, C, D, E, F ad rectos angulos erigantur totidem aliæ rectæ lineæ AN, CN, DN, EN, FN, quæ ſint in progreſſione Geometrica, ut AN ſit ad CN, veluti eſt CN ad DN; & CN ſit ad DN, ut DN, ad EN, atque ita deinceps. Porrò, unaquaque harum portionum biſecta, excitentur ex punctis ſectionum totidem aliæ perpendiculares; quæ ſint mediæ proportionales inter proximas collaterales: atque ejuſmodi biſectio tamdiu peragatur, donec perpendiculares, quæ ex punctis ſectionum eriguntur, fiant ſibi quàm maximè vicinæ: his enim effectis, pertranſibit per extremitates earum perpendicularium Curva linea N N; quæ Logiſticæ, ſive Logarithmicæ nomen accepit: quandoquidem ex ipſa geneſi palam eſt, quòd, exiſtentibus ejus abſciſſis in arithmetica progreſſione, ordinatæ iis abſciſſis inſiſtentes progreſſionem conſtituant Geometricam, quæ eſt proprietas præcipua Logarithmorum.

Figura III.

Hinc præcipuus hujus Curvæ uſus in Logarithmorum natura, & inventione explicanda ſe prodit. Nam

Nam primò, ſi ejuſmodi Curva Linea eſſet in ſpatio ingentiori adcuratè deſignata, ut portiones primo loco adſumptæ AC, CD, DE, EF [*ead. Fig.*] tantæ eſſent magnitudinis, ut ſingulæ per plures biſectiones ſubdividi poſſent non modò in centum, aut mille, ſed in decem, aut centum mille particulas æquales; poſitâ quidem AC partium 100000, ut ita ſit punctum A partium 00000, foret AD partium 200000: AE partium 300000. atque ita deinceps: proindeque, ſi perpendiculares AN, CN, DN, EN ponantur eſſe in ea Geometrica progreſſione, quæ incipiens ab unitate creſcit in decuplum, ita ut poſitâ AN 1, ſit CN 10, DN 100, EN 1000; atque ita deinceps; certò numeris Geometricè proportionalibus, 1. 10. 100. 1000. correſpondebunt numeri alii arithmeticè proportionales, tanquam Logarithmi primarii, 00000. 100000. 200000. 300000. . . . Unde jam cuilibet dato numero intermedio facilè poſſet ſuus logarithmus adſignari. Quippè ſi datus numerus fuerit numerus 9. abſciſsâ ex linea principali BN portione BF, quæ ſit ad perpendicularem AN, ut 9. ad 1. ductâque per punctum F rectâ lineâ FO ipſi AB parallelâ, quæ ſecet deſcriptam Curvam in puncto O; portio AM, quam ex ipſa AB abſcindit demiſſa perpendicularis OM, logarithmus erit quæſitus.

Figura 112.

Quòd ſi verò arduum videatur figuram adeò grandem, & exactam delineare, ut ita difficile ſit hac ratione Logarithmos invenire; attamen clariſſimus talis delineationis modus evidentem rationem nobis aperit arithmeticam, quo viri ingenioſi uſi ſunt in condendis Tabulis Logarithmorum; quas ſumma operantium ſollertiâ, & facilitate jam habemus: ſcilicet invenerunt ii continue medias proportionales arithmeticas inter duos quoſvis logarithmos jam notos, & medias proportionales Geometri-

cas

Digitized by Google

cas inter duos numeros vulgares logarithmis iis correſpondentes: ſicuti in delineanda ipſa Curva logarithmica portiones priores biſecantur; & ex punctis ſectionum perpendiculares totidem eriguntur; quæ ſint mediæ proportionales Geometricè inter proximas collaterales. Sed hæc fuſiùs proſequi non eſt hujus loci: & ſatis ſit, ea indicaſſe, ut uſus adlatæ Curvæ innoteſcat. Nam integrum logarithmorum libellum non eſt nobis propoſitum exhibere; in quo ſolent, præter logarithmos ordinarios, hyperbolici quoque logarithmi explicari. Ceteroquin qui logarithmicæ Curvæ Proprietates omnes cupiat, eaſque Veterũ more velit demonſtratas, adeat præclarum opus P. Guidonis Grandii noſtri Mathematici, in quo Hugenianorum Theorematum demonſtrationes traduntur. Nam occaſione horum Theorematum non modò proprietates theorematibus iis comprehenſas, verùm alia quoque permulta doctiſſimè quidem, & Geometricè perſequitur.

Occurrit ſecundo loco Spiralis Logarithmica, quæ tale quoque nomen ſortita eſt, quòd logarithmorum proprietas in ea ſimiliter deprehendatur. Ejus enim natura talis conſtituitur, ut ſi ex centro ipſius A ducatur ad aliquod ejus punctum recta linea AM; eamque contingat in eodem puncto M recta linea MT; quòd, inquam, angulus AMT radio AM, & tangente MT comprehenſus ſit ſemper ejuſdem magnitudinis, quocumque in loco Spiralis punctum M accipiatur. Ex quo deducitur, quòd, exiſtentibus angulis in centro æqualibus, atque ideò componendo, Arithmeticè proportionalibus; radii eos angulos conſtituentes Geometricam ſervent progreſſionem: quippè ſi ex centro A ducantur ad ſpiralem plures radii AM, AN, AO, AP; qui ſint inter ſe indefinite proximi; & efficiant in centro A Figura 113.

an-

angulos MAN, NAO, OAP æquales, & indefinite parvos; ut ita componendo anguli MAN, MAO, MAP ſint arithmeticè proportionales; certò, propter radiorum indefinitam propinquitatem, portiones interceptæ Spiralis MN, NO, OP tanquàm totidem rectæ lineæ indefinitæ parvitatis ſumi poterunt; quæ ſe confundant cum tangentibus, quæ ducuntur ad puncta Spiralis M, N, O. Unde jam, cùm propter naturam Spiralis æquales quoque ſint anguli AMN, ANO, AOP; æquiangula erunt triangula MAN, NAO, OAP: atque ideò inter ſe ſimilia. Idcircoque erit ut AM, ad AN, ita AN, ad AO; & ut AN ad AO, ita AO ad AN.

Figura 114. Occurrit tertio loco Spiralis Parabolica ſic dicta, quòd Apollonianæ Parabolæ naturam præſeferat. Intelligitur namque generari, ſi ex centro alicujus Circuli A ductis ad ipſius circumferentiam radiis AM, fiat ſemper ut rectangulum, quod fit ex recta quadam linea conſtanti (quam parametrum, ſive latus rectum nominare licet) in arcum aliquem BM ſit æquale quadrato portionis MN ſumptæ in correſpondente radio AM. Nam hoc pacto, conſiderando ipſos arcus BM tamquam abſciſſas, & portiones MN veluti ordinatas abſciſſis iis correſpondentes; erit, perindè ac in Parabola Apolloniana, quadratum cujuſque ordinatæ æquale rectangulo, quod fit ex parametro, ſive latere recto in abſciſſam correſpondentem. Atque ideo duarum, aut plurium ordinatarum quadrata habebunt inter ſe eamdem rationem, quam habent abſciſſæ correſpondentes. Sed facile eſt ad hujus ſimilitudinem ſpirales alias in infinitum effingere. Nam, ſicuti Parabolas alias conſideravimus, in quibus non modò quadratum, ſed quævis ordinatæ poteſtas adæquet productum homogeneum, quod fit ex alia inferiori poteſtate

Digitized by Google

teſtate lateris recti in poteſtatem reliquam abſciſſæ correſpondentis; ita quoque Spirales aliæ hanc eamdem naturam habentes conſiderari poterunt: proindeque ea omnia, quæ ſuperiùs de infinitis Parabolis dicta ſunt, ad ejuſmodi quoque Curvas poterunt accomodari.

Et denique conſideranda eſt Curva quædam, quam Cycloïdem dimidiatam dicere ſoleo; cùm generari intelligatur per adplicationem arcus alicujus Circuli ſuis abſciſſis correſpondentibus. Si *ACB* fuerit Circulus aliquis, cujus diameter ſit recta AB, & ad eam adplicentur ordinatæ CM; ſane protractis hiſce ordinatis uſque ad puncta N; ſed ita tamen, ut quælibet ipſarum MN adæquet arcum correſpondentem AC, tranſibit per puncta iſta Curva linea AND; quæ erit illa eadem, quam hic ponimus Curvam. Unde hujus Curvæ ea eſt proprietas, ut quævis ipſius ordinata MN adæquet arcum in Circulo genitore correſpondentem AC; cùm tamen in Cycloide eadem ordinata MN adæquabat arcum AC, unà cum correſpondente ordinata Circuli genitoris CM. Hinc palam eſt, Curvam iſtam eſſe Cycloïdem dimidiatam; quandoquidem ſi in Cycloide intelligatur Circulus genitor ad diametrum reductus, eouſque, ut evaneſcant omnes ipſius ordinatæ CM, ipſa Cyclois in hanc Curvam immutabitur. Figura 115.

Quocircà ex cognitis Cycloidis proprietatibus facile erit alterius hujus Curvæ proprietates deducere. Nam primò, quemadmodum in Cycloide ſpatium ſub ipſa, & baſi comprehenſum triplum eſt Circuli genitoris; ita in hac Curva ſpatium, (*ead. Fig.*) quod ſub ipſa & baſi continetur duplum eſſe debet Circuli genitoris; cum nil aliud ſit, quàm ipſum illud ſpatium Cycloïdale Circulo genitore diminutum. Unde conſequens eſt ſecundò, ut ſpatium,

quod à Curva, & circumferentiâ Circuli genitoris, ac baſi comprehenſum eſt, ipſo Circulo ſit æquale: & tertiò, ut, deſcripto circa ipſam Curvam rectangulo, quia ejuſmodi rectangulum eſt quadruplum Circuli genitoris, cùm fiat ex ipſius diametro in Curvæ baſim, quæ eſt æqualis integræ circumferentiæ Circuli genitoris; ſpatium externum ſit æquale ſpatio interno: & conſequenter duplum quoque Circuli genitoris.

Figura 116.

Ceterum noſcendum eſt, figuram ipſius Curvæ talem eſſe, qualem ſubjectū Schema nobis exhibet: nempè, ut a vertice A uſque ad ordinatam centro Circuli genitoris correſpondentem GF ſit concava ex parte interiori, & convexa ex parte exteriori; ac viciſſim, ut ab eadem ordinata GF, uſque ad baſim ſit convexa ex parte interiori, concava autem ex parte exteriori. Atque oritur hujuſmodi converſio; quia, ſi compleatur circa Curvam ipſam rectangulum, & in utraque ejus portione ordinatæ uſque ad rectangulum producantur; ordinatæ portionis prioris ſint æquales complementis, quæ ordinatis ſecundæ portionis propter rectangulum adjunguntur: & viciſſim ordinatæ ſecundæ portionis æquales complementis, quæ prioris portionis ordinatis propter idem rectangulum adjunguntur. Hinc enim ſit, ut ſecunda portio ſit ipſa prior; niſi quòd iſtius puncta referantur ad diametrum Circuli genitoris; cùm tamen puncta illius latus rectanguli ſibi vicinum reſpiciant.

FINIS.

ADPRO-

ADPROBATIO

JUſſu Reverendiſſimi P. Præpoſiti Generalis noſtri Ordinis adtente perlegimus Librum, cui titulus, *De Lineis curvis Liber* = à R. P. D. Johanne Baptiſta Caracciolo noſtri Ordinis Presbytero, & in Piſano Licæo Publico Philoſophiæ Profeſſore compoſitum. Cùm in eo nihil Chriſtianæ Religioni, boniſque moribus contrarium deprehenderimus; dignum eſſe cenſemus; quo ad id, quod ad noſtram adprobationem ſpectat, ut typis mandetur. Dat. in noſtris Ædibus S. Marię Montis Nigri in Agro Liburnenſi die 18. Aprilis 1740.

P. D. Petrus Cajetanus Maſetti C. R. Præpoſitus Domûs, Sac. Theol. Prof.
P. D. Franciſcus Maria Donati C.R. Vicarius Domûs, Sac. Theol. Profeſſ.

HOc Opus Mathematicum *De Lineis Curvis* à R. P. D. Jo. Baptiſta Caracciolo noſtrę Congregationis Theologo, & in Academia Piſana Philoſophię Doctore compoſitum, & juxta aſſertionem Patrum, quibus id commiſimus, approbatum, ut typis mandetur, quo ad Nos ſpectat, facultatem concedimus. In quorum fidem prębentes Literas manu propria ſubſcripſimus: & ſolito noſtro Sigillo firmavimus. Romę in Ædibus S. Silveſtri Montis Quirinalis die 23. Aprilis 1740.

P. D. Andreas Bolognetti Præpoſitus Gener. C.R.
P.D.Jo.Baptiſta Cagnola C.R. Secret.

Imprimatur *Vic.Gen. S.Offic. Piſ.*
Imprimatur *Clemens Maria Froſini Vic.Gen.*
Imprimatur *Eques Blaſius Curinius, &c.*

Digitized by Google

Erratorum Emendationes.

In Præfatione Pag. iii. lin. 9. Accademiarum, *emenda* - Academiarum. In Opere, Pag. 7. lin. 4. CE, *emenda* - CF. Ibidem ead. lin. A E - A B. Pag. 17. lin. 18. N E - D E. lin. 21. ad reſtangulum ANB - ad rectang. ADB. Pag 35. lin. 1. & $= n$ 1 - & $n = 1$. Pag. 38. lin 10. protrahatur A C - protrahatur B C. Pag. 49. lin. 23. Circulis - Circulus. Pag. 50. lin. ult. occurrit - occurrat. Pag. 53. lin. 20. ex BG^{n} - ex BG^{m}. lin. 26. ad PI^{n} - ad PI^{m}. Pag. 59. lin. 12. ad BG^{4} - ad BC^{4}. Pag. 60. lin. 23. in A B portio A F = BM in A B portio AF (Fig 17.) = B M (Fig. 18.). lin. 16. cum ſua parametro datà E Q - *tolle* datà. Pag. 6?. lin. 26. ab Triangulum - ob Triangulum. Pag 65. l. 21. PA - PH. Pag. 66. lin. penult. $= fe - ex$ - $= \frac{fe - ex}{f - x}$.

Pag. 72. lin. 8. & eſt A E $= x - a$ - & eſt B E $= x - a$. lin. 27. $\frac{-eeggb + mddfe}{pegg - pmgf}$ - $\frac{-eggpb + emddf}{epgg - emfg}$. Pag 76. lin. 21. (pag. 18. & 19.) - (pag. 58. & 59) Pag. 78. lin 3. pro Parabola cubica ſecuoda - pro Ellipſi cubica ſecunda. lin. 11. pro Parabola cubica prima - pro Ellipſi cubica prima. lin. ult. $x = \frac{aggb}{egg - bpp}$ - $x = \frac{aggb}{egg - bpp}$. Pag. 80. lin. 24. inter A M, & M N - inter A M, & A C. Pag. 82. lin. 14. inter MO, & MN - inter MO, & AM. Pag. 84. lin. 2. $\frac{yy}{a + x}$ - $\frac{yy}{\frac{a + ax}{b}}$ Pag. 85. lin. 12. portioni AF in AC - portioni AE in AC. lin. 27. quia $y . x :: x \frac{yy}{a}$ - quia $y . x :: a . \frac{yy}{a}$. Pag. 88. lin. 21. ratio A F - ratio AE.

Pag. 96. lin. 8. ut C F, ad F H - ut CH ad FH. Pag. 97. lin. 9. nominando - nominanda. Pag 98. lin. 6. AC, AE - AC, CE. Pag. 100. lin. 14. AE - CE. Pag. 101. lin. 18. parametrum - perimetrum. Pag. 103. lin. 6. & completo parallelogram-

grammum AD - & completo parallelogrammo AD. Pag. 106. lin. 20. æquale - æqualia. Pag. 108. lin. 32. emiſſæ AO - emiſſæ AC. Pag 110. lin. 1. abſcindatur QG - fiat AG. Pag. 115. lin 2. invetus - inventus. Pag 117 lin. 27. fine linea abſciſſarum - in ipſa AK ſumptà pro linea abſciſſarum. Pag. 125. lin 6 ſuper rectà FA - ſuper rectà GA. Pag. 132. lin. 23. modus - modos. Pag. 133. lin. 19. ipſa anguli lateri - ipſa anguli latera. Pag. 143. lin. 24. ipſa AM - ipſa OM. Pag. 144. lin. 12. interceptum - interceptam. *In fine tolle ex margine* Fig. 80.

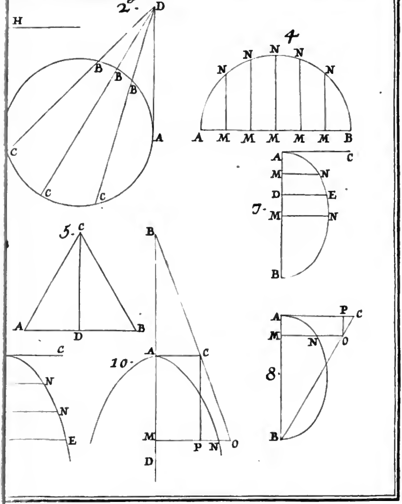
Pag. 149. lin. 11. AM^2 - OM^2. lin. 19. AM^2 - OM^2. Pa. 155. lin. 8. $\frac{cay - cby}{bx}$ - $\frac{cay - cbx}{bx}$. Pag. 150. lin. 33. DEN - DEB.

Pag 173. lin. 16. ita x'. T' - ita t'. T'. lin. 18 x ſit ad T. - t ſit ad T. Pag. 176. lin. 33 AN - AM. Pag. 184. lin. 29. motu variabili - & ex motu variabili. lin. ult. rarione - ratione. Pag 186. lin. 3. ſi ponatur m - ſi ponatur n. Pag. 192. lin. 6. DBD - DAD. Pag 198. lin. 20 chorda NC - chorda NG. Pag. 199. lin. 19. alterius Circuli BGD - alterius Circuli BGE. Pag. 201. lin. 33. rationalis exiſtit - irrationalis exiſtit. Pag. 202. lin. 15. ardinatæ y - ordinatæ y. Pag. 203 lin. 7. denominatus ſinus CP - denominatus ſinus CP (Fig. 110.) lin. 16. HA, FB - FB, HA. Pag. 204. lin. 2. minoris ad majus, - majoris ad minus. lin. 3. majoris ad minus, - minoris ad majus. Pag. 208. lin. 13. ita AO ad AN - ita AO ad AP.

Digitized by Google

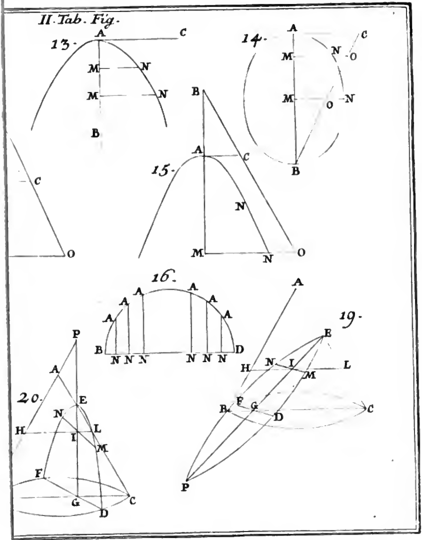
5.5.368 214a

Primae Tabulae Figurae



Digitized by Google

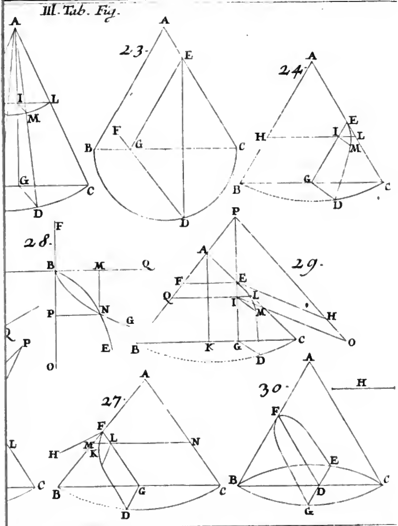
5.5, 368



Digitized by Google

Digitized by Google

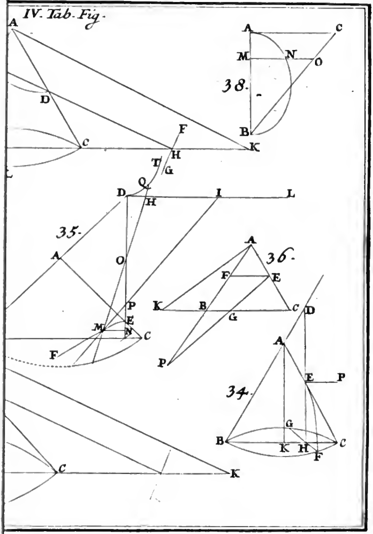
5.5. 3-2



Digitized by Google

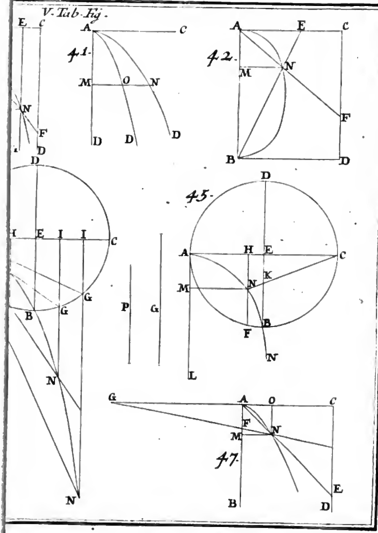
5. 5. 368

214 d



Digitized by Google

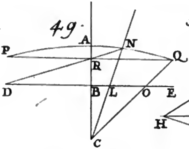
5.5.36.F
214a

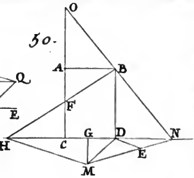


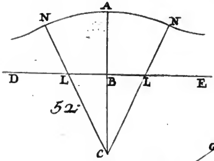
Digitized by Google

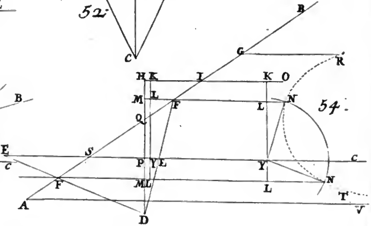
5.5.3 214 f.

VI. Tab. Fig.



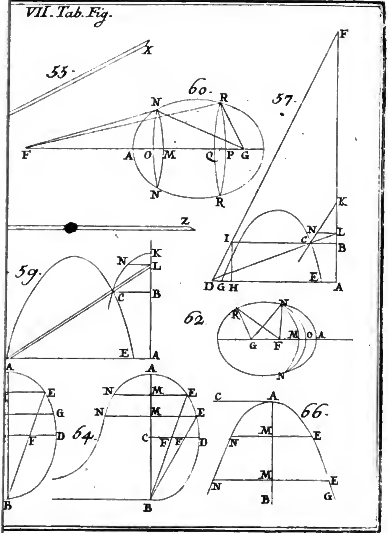




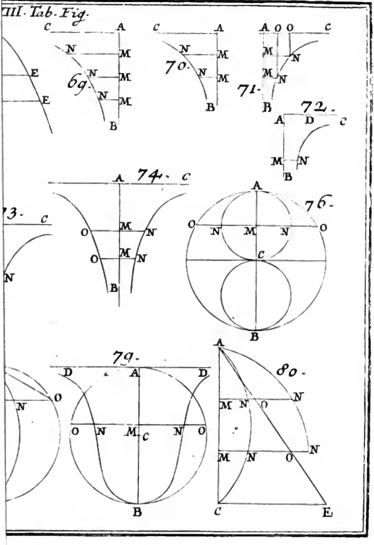


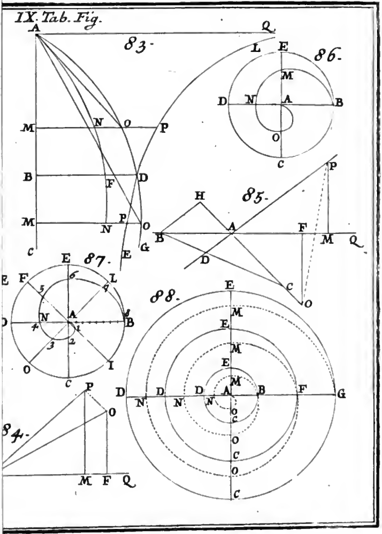
Digitized by Google

5, 5, 368


VII. Tab. Fig.
55.
X
60.
N R
F A O M Q P G
N R
57.
F
K
N L
I C B
D G H E A
Z
59.
K
N L
C B
E A
62.
R N
G F M O A
N
A A
E N M E
G N M E
F D 64. C F F D
B B
C A
66.
M
N E
M
N E
B G

5.5.368 214h

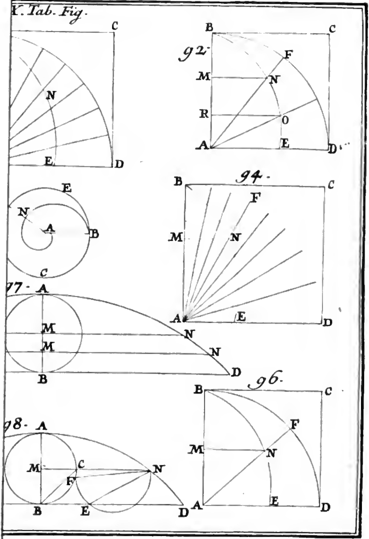




Digitized by Google

Digitized by Google

5.5. 368
2142



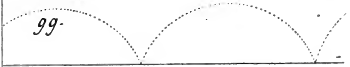
Digitized by Google

Digitized by Google

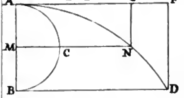
5.5.368

XI. Tab. Fig.

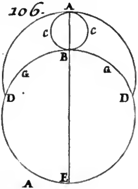
99.



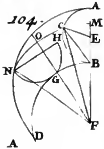
101.

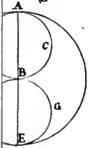


106.

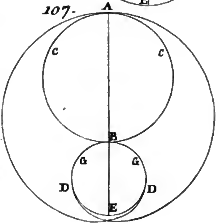


104.





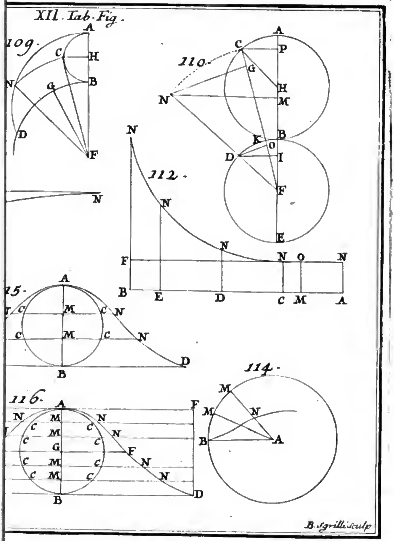
107.



Digitized by Google

Digitized by Google

5. 5. 368 214



Digitized by Google

Z
5.5.368
24 10104

Digitized by Google

Mc

Digitized by Google